

Aufgabenbeispiel zur Kurvendiskussion

- (1) Definitionsbereich
- (2) Achsenschnittpunkte
- (3) Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty \wedge x \rightarrow -\infty$
Grenzwertverhalten an den Polstellen
Ableitungen
- (6) Extrempunkte
- (7) Polynomdivision -> Asymptotengleichung

1. Beispiel : $f(x) = (x^2-4)/(x-1)$

- (1) Definitionsbereich

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Bedingung : $x-1 \neq 0$

$$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Achsenschnittpunkte

Schnittpunkte mit x-Achse

Bedingung : $f(x) = 0$

$$x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \text{ (Auflösen nach } x)$$

oder

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \text{ (Binomische Formeln)}$$

$$\Rightarrow Sx1 (-2;0) \wedge Sx2 (2;0)$$

Schnittpunkte mit y-Achse

Bedingung : $x = 0$

$$f(0) = (0^2 - 4)/(0 - 1) = -4/-1 = 4$$

$$\Rightarrow Sy(0;4)$$

Grenzwerte für $x \rightarrow -\infty \wedge x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - 4/x)}{x(1 - 1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4/x}{1 - 1/x} \left[= \frac{\infty}{1} \right] = +\infty$$

$$x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty \quad x - 1 \quad x \rightarrow \infty \quad x(1 - 1/x) \quad x \rightarrow \infty \quad 1 - 1/x$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4/x^2}{1/x - 1/x^2} \left[= \frac{1/0}{0} \right] = +\infty$$

$$x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty \quad x - 1 \quad x \rightarrow \infty \quad 1/x - 1/x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \left[= \frac{-\infty}{1} \right] = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

Folgerung : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Grenzwertverhalten an den Polstellen

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)^2 - 4}{(1-h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2h + h^2 - 4}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3 - 2h + h^2}{-h} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 4}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3 + 2h + h^2}{h} = -\infty$$

Folgerung : Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

$x \neq 1$

besitzt eine Unendlichkeitsstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach - an der Stelle $x=1$

Ableitungen

1. Ableitung

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2-4) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 4}{(x^2 - 2x + 1)}$$

2. Ableitung

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x+1) - (x^2-2x+4)(2x-2)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-6x+6}{(x-1)^4} = \frac{-6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

3. Ableitung

$$f'''(x) = \frac{18}{(x-1)^4}$$

Extrempunkte

notwendige Bedingung : $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \underline{x^2 - 2x + 4} = 0$$

$$(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{1-4} \text{ nicht definiert}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{1-4} \text{ nicht definiert}$$

$$LL = \{ \}$$

Folgerung : Es gibt keine Hoch- oder Tiefpunkte

Asymptotengleichung

$$(x^2 - 4) : (x-1) = x+1 + (-3)/(x-1)$$

$$\underline{-(x^2 - x)}$$

$$x-4$$

$$\underline{-(x-1)}$$

$$-3$$

$$(x^2 - 4) : (x-1) = x+1 + (-3)/(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)/(x-1) = x+1 - 3/(x+1) = f(x) \mid -(x+1)$$

↓↓

$$f(x) \quad g(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \pm \infty)$$

Behauptung : $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x)$

$x \rightarrow \pm \infty$ $x \rightarrow \pm \infty$

Beweis : $\frac{x^2-4}{x-1} - (x-1) = -\underline{3}$

$x-1$ $x-1$

↓

$f(x) - g(x) = -\underline{3}$

$x-1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\underline{3}$

$x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \infty$ $x-1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad | \quad +[\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)]$

$x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \infty$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

$x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \infty$