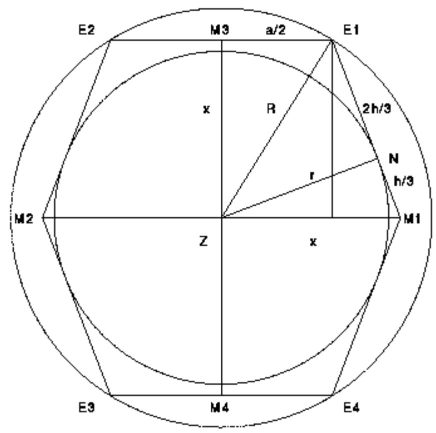
DAS IKOSAEDER

Berechnung:



Zur Bestimmung des Radius R der umschreibenden Kugel des Ikosaeders und des Radius r der in das Ikosaeder einbeschriebenen Kugel legt man eine Schnittebene durch zwei solche Kanten des Ikosaeders, die einander parallel gegenüberliegen. Die zu diesen Kanten gehörenden Ecken des Ikosaeders seien E1 und E2 bzw. E3 und E4. Offensichtlich liegt auch das Zentrum Z des Ikosaeders in dieser Schnittebene. Weiterhin schneidet die Ebene die Oberfläche des Ikosaeders außer in den zwei Kanten noch in genau vier Seitenmitten von vier Dreiecksflächen des Ikosaeders. Diese Seitenmitten sind gleichzeitig Höhen in den betreffenden gleichseitigen Dreiecken und haben daher die Länge h = a/2*sqrt(3). Die Schnittebene schneidet aus der Oberfläche des Ikosaeders also ein Sechseck aus, dessen Ecken neben vier Ikosaederecken noch zwei Mittelpunkte M1 und M2 von Ikosaederkanten sind. Diese sechs Punkte seien in naheliegender Weise in der folgenden Reihenfolge bezeichnet: M1, E1, E2, M2, E3, E4.

Schließlich seien noch M3 der Mittelpunkt der Kante E1E2, und M4 der Mittelpunkt der Kante E3E4 sowie N der Punkt auf der Höhe M1E1, der diese im Verhältnis M1N : NE1 = 1 : 2 teilt. Er ist der Schwerpunkt des zugehörigen Dreiecks des Ikosaederdreiecks und damit Berührpunkt der einbeschriebenen Kugel.

In diesem Sechseck sind nun die Verbindungslinien der vier Kantenmittelpunkte M1, M2, M3 und M4 jeweils mit Z aus Symmetriegründen gleich lang, also speziell etwa M1Z = M3Z = x. Weiterhin gilt ZE1 = R, ZN = r und M3E1 = a/2. Schließlich hat man E1M1 = a/2*sqrt(3), E1N = a/3*sqrt(3) und NM1 = a/6*sqrt(3) nach bekannten Formeln für das gleichseitige Dreieck der Kantenlänge a.

In geeigneten rechtwinkligen Dreiecken ergeben sich nun durch Anwendung des Satzes des Pythagoras:

R2 = r2 + a2/3,

R2 = x2 + a2/4,

x2 + (x - a/2)2 = 3/4*a2,

wobei die letzte Formel aus demjenigen Dreieck abzulesen ist, das durch Ziehen der Parallele zu M3Z durch E1 entsteht. Aus dieser Formel ermittelt man

x = a/4*(1 + sqrt(5))

und somit

x2 = a2/8*(3 + sqrt(5)).

Durch Einsetzen in die zweite Formel erhält man

R = a/4*sqrt(10 + 2*sqrt(5))

und damit schließlich aus der ersten Formel

r = a/12*sqrt(3)*(3 + sqrt(5)).

Zur Bestimmung des Volumens V des Ikosaeders denkt man sich das Ikosaeder vom Zentrum Z aus in 20 gleiche Pyramiden zerlegt, deren Grundfläche gleich der Fläche des gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a ist, also G = a2/4*sqrt(3) und deren Höhe der Radius r der einbeschriebenen Kugel ist. Also gilt

V = 20*(1/3)*r*G = 5/12*(3 + sqrt(5))*a3.

Die Oberfläche des Ikosaeders besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge a, also

O = 20*G = 5*sqrt(3)*a2.

Vorkommen:

PLATON verwendete die Vorstellung von Empedokles. Er versuchte den Aufbau der Materie mathematisch zu beschreiben. Seine Grundelemente waren die regulären Körper Tetraeder für Feuer, Oktaeder für Luft, Ikosaeder für Wasser und Hexaeder (Würfel) für Erde. Der Dodekaeder als fünfter regulärer Körper war dem kugelförmigen Weltganzen zugeordnet. Diese Körper sind so klein, daß sie nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden können.

Man erhält einen **Fußball**, indem man einen Ikosaeder nimmt und an jeder Ecke eine Pyramide abschneidet. Die Platonischen Körper symbolisieren zugleich die fünf Elemente, aus denen sich das Universum zusammensetzt.

Für die allgemeine Gleichung 2., 3. und 4. Grades gibt es Formeln, die es gestatten, die Lösungen aus den Koeffizienten der Gleichung durch Wurzelziehen zu gewinnen, für die allgemeine **Gleichung 5**. Grades kann es dagegen keine solche Formel geben. Der Grund dafür ist, daß die Symmetriegruppe dieses Problems, die Gruppe aller (geraden) Permutationen von 5 Gegenständen (hier: der 5 Lösungen der Gleichung) nicht auflösbar ist. Dieselbe Gruppe tritt aber auch als Symmetriegruppe des Ikosaeders auf, des platonischen Körpers, der durch 20 gleichseitige Dreiecke begrenzt wird, so daß an jeder Ecke 5 Dreiecke zusammenstoßen. Felix Klein hat um 1870 ausgeführt, daß die Lösung der Gleichung 5. Grades eine enge Verbindung zum Ikosaeder hat: Dem Ikosaeder ist eine rationale Funktion zugeordnet ("Ikosaeder-Überlagerung"), mit deren Umkehrungen man die Gleichung lösen kann. Damit wurden zwei Grundaufgaben der Mathematik miteinander verbunden: Das Lösen von Gleichungen und die Untersuchung räumlicher Formen, Algebra und Geometrie.

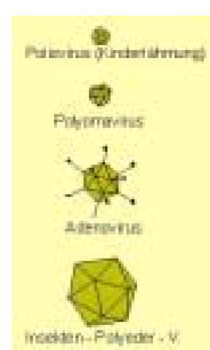
C60 – härter als ein Diamant:

HENTRIACONTACYCLO(29.29.0.0^2.14.0^3.12.0^4.59.0^5.10.0^6.58.0^7.55.0^8.53.0^9.21.0^11.2.0^13.18.0^15.30.0^16.28.0^17.25.0^19.24.0^22.52.0^23.50.0^26.49.0^27.47.0^29.45.0^32.44.0^33.60.0^34.57.0^35.43.0^36.56.0^37.41.0^38.54.0^39.51.0^40.48.0^42.46)hexaconta-1,3,5(10),6,8,11,13(18),14,16,19,21,23,25,27,29(45),30,32(44),33,35(43),36,38(54),39(51),40(48),41,46,49,52,55,57,59-triaconten

Buckminsterfulleren, C60, ist ein Cluster aus 60 Kohlenstoffatomen (und damit ein weiteres "Allotrop" neben Graphit und Diamant), welche in Form eines hohlen Käfigs angeordnet sind (allgekappter Ikosaeder, 12 Fünfecke und 20 Sechsecke), mit anderen Worten: wie ein Fußball.

Viren in der Biologie:

Die zwar voll entwickelten und infektiösen, aber extrazellulären und daher vorübergehend in einer Ruhephase befindlichen Viren-Partikeln nennt man Virionen. Chemisch sind sie Nucleoproteine (d.h. Komplexe aus Proteinen und Nucleinsäuren), die teilweise kristallisierbar sind. Während in zellulären Organismen stets beide Typen von Nucleinsäuren, nämlich Ribonucleinsäuren (RNA) und Desoxyribonucleinsäuren (DNA) anzutreffen
sind, findet man in Viren nur entweder RNA oder DNA als genetisches Material. Die aus Protein-Untereinheiten (Capsomeren) bestehende Schutzhülle (Capsid) ist in der Regel symmetrisch gebaut: Entweder sind die Einheiten wie die Stufen einer Wendeltreppe aneinandergereiht, so daß sich eine Helix-Struktur (vgl. Abb. 1) ergibt, oder sie sind zu einem geschlossenen Hohlkörper vereinigt, der eine höhere Symmetrie besitzt, siehe die Beispiel der Ikosaeder in Abb. 2.

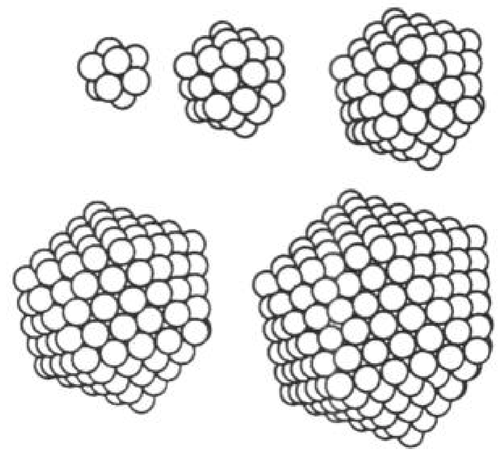


Clusterphysik:

Die Clusterphysik ist von besonderem Interesse, da sie ein Bindeglied zwischen der Atom- bzw. Molekülphysik und der Festkörperphysik darstellt.

Was ist unter dem Begriff Cluster zu verstehen?

Nach dem "Concise Oxford Dictionary" ist der Begriff Cluster gleichbedeutend mit "a group of similar things". Im Deutschen gibt es allerdings keine vernünftige, allgemeingültige Definition für diesen Begriff. Ganz allgemein kann man unter einem Cluster ein aus identischen Teilchen zusammengesetztes Ganzes verstehen. Die Bezeichnung Cluster wird daher nicht nur in der Festkörperphysik verwendet, wo dieser aus identischen Atomen oder Molekülen besteht, sondern auch z.B. in der Medizin (Tumorwachstum), Astronomie (Sterne, Galaxien), Musik (moderner Mehrklang), Informatik (Netzwerke) und neuerdings sogar in der Nahrungsmittelindustrie.



Mackay Ikosaeder (nach Hoare 1978). Von oben links nach unten rechts beträgt die Anzahl der Atome 13, 55, 147, 309 und 561.

Eine Anhäufung von N gleichen Atomen bzw. Molekülen wird noch solange als Cluster bezeichnet, wie sich ein großer Teil der Atome an der Oberfläche des Clusters befindet. Eine bestimmte Obergrenze in Richtung Festkörper (108 Atome) gibt es allerdings nicht. Diese Grenze muß je nach Art des Clusters und der zu untersuchenden physikalischen Eigenschaft einzeln gezogen werden. Die minimale Untergrenze für die Teilchenzahl eines Clusters ist durch N=3 gegeben.