

Digitale Signalverarbeitung

A Transformationen

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Komplexe Zeigerrechnung

Legt man an einem Eingang eines Netzwerkes unterschiedliche Signalformen an, so treten im Netzwerk, je nach Bauteile, unterschiedlichste Signalformen auf.

Beim Anlegen eines sinusförmigen Signales stellt man fest, daß überall im Netzwerk wieder sinusförmige Signale gleicher Frequenz auftreten. Sie unterscheiden sich nur in Betrag und Phase.

Da man weiß, daß überall in Netzwerk nur sinusförmige Größen auftreten, kann man für alle Signale einen sinusförmigen Ansatz machen:

$$f(t) = F \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Es zeigt sich, daß Winkelfunktion mathematisch viel schwieriger zu behandeln sind, als komplexe Zeiger. Man setzt daher die Signale als komplexe Zeiger an, das meßbare Signal ist dann der Realteil davon.

$$f(t) = F \cdot e^{j\omega t} = F \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = F \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = F \cdot e^{j\omega(t + \frac{\varphi}{\omega})} = F \cdot e^{j\omega(t - t_0)}$$

daraus folgt

$$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$$

Um den Realteil einer Cosinusschwingung darzustellen, können wir mit Hilfe der Euler'schen Formel

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

und der daraus abgeleiteten Beziehungen

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\sin x = -j \frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx})$$

folgenden Ansatz durchführen:

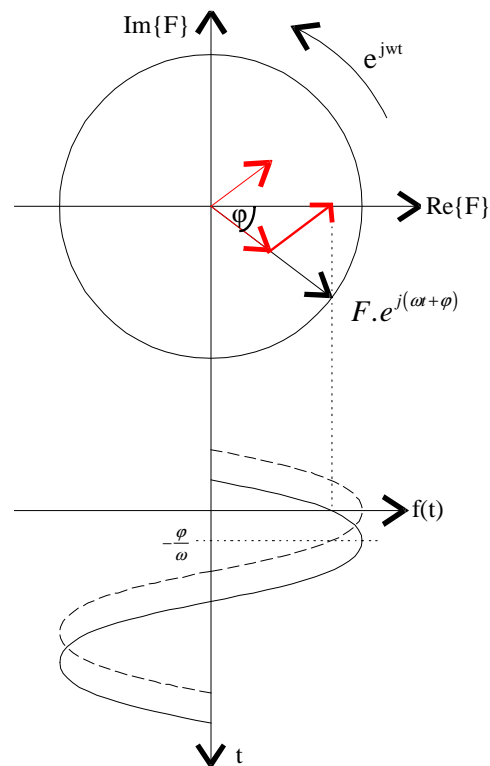
$$f(t) = F \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F}{2} \left(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right)$$

$$f(t) = F \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F}{2} \left(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right)$$

oder allgemein

$$\boxed{\operatorname{Re}\{\underline{f}(t)\} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{f}(t) + \underline{f}(t)^*)}$$

Diese Formel ist auch recht anschaulich in Abb.1 zu sehen.



$$f(t) = \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right) = \cos \omega(t - t_0)$$

Die physikalische Realität der cosinusförmigen Schwingung, beispielsweise der zeitliche Verlauf einer Spannung, wird also durch ein *Modell zweier Zeiger* dargestellt, die gegensinnig in der komplexen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Ihre vektorielle Addition ergibt den Momentanwert der Cosinusschwingung. Dieser Wert ist immer eine reelle Größe trotz der komplexen Anteile der beiden Zeiger (siehe Abb.1). Dabei ordnen wir dem in positiver Richtung umlaufenden Zeiger die positive Umlauffrequenz $+\omega$, dem gegensinnig rotierenden Zeiger die negative Frequenz $-\omega$ zu.

Wir müssen uns darüber im klaren sein, daß dem realen physikalischen Vorgang nur eine positive Frequenz ω zukommt, daß wir aber eine negative Frequenz $-\omega$

hinzunehmen müssen, wenn wir unsere Modellvorstellung der rotierenden Zeiger (oder komplexen Zeiger) verwenden, um beispielsweise den Verlauf einer Spannung richtig voraussagen zu können.

Bei der Darstellung des komplexen Zeigers kann neben der schon in Abb.1 gezeigten Veranschaulichung mit dem rotierenden Zeiger auch ein Betrags- und Phasenspektrum verwendet werden. Es ist zu unterscheiden zwischen dem einseitigen Spektrum und dem 2-seitigen Spektrum mit der negativen Frequenz (siehe Abb.2).

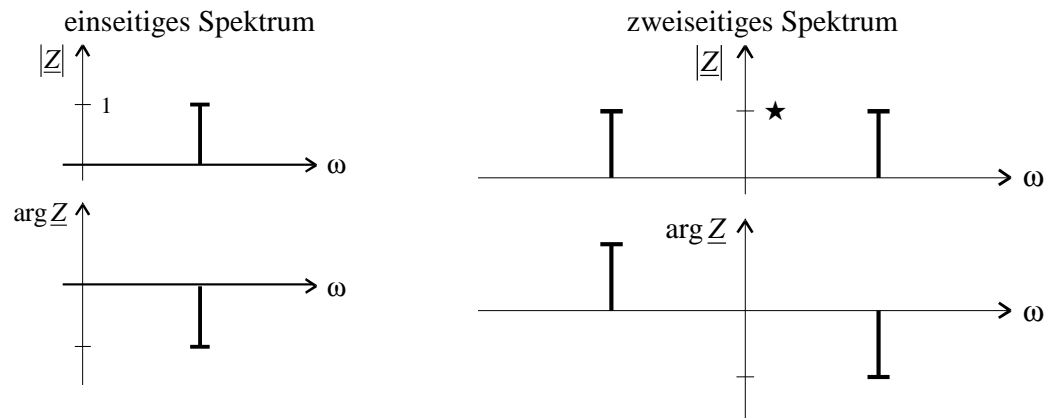


Abb.2

1.2 Komplexe Frequenz

Bei der Untersuchung von Netzwerken ergibt sich eine nützliche analytische Erweiterung der gewohnten Beschreibung stationärer Sinusschwingungen durch die Einführung der komplexen Frequenz

$$p = \sigma + j\omega$$

In der gewohnten Zeigerdarstellung erhält man dadurch den komplexen Augenblickswert:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{pt} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = \hat{u} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Durch diese Einführung der komplexen Kreisfrequenz p erhalten wir nun eine einheitliche Darstellung sowohl für stationäre als auch für an- bzw. abklingende Sinusschwingungen (siehe Abb.3). Bisher haben wir nur mit einem Sonderfall der komplexen Frequenz gerechnet- dem stationären Zustand ($\sigma = 0$).

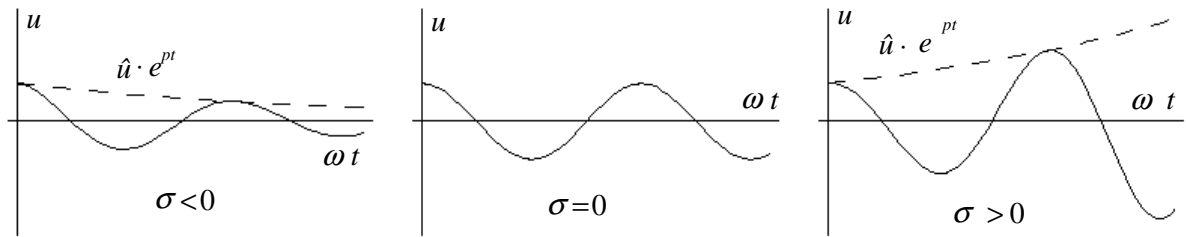
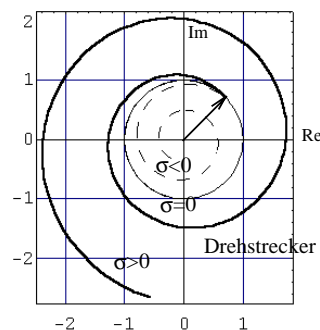


Abb.3

Wie jede komplexe Zahl, kann auch die komplexe Kreisfrequenz p in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden. Man spricht dann von der Ebene der komplexen Kreisfrequenz oder p -Ebene (siehe Abb.4).



komplexer Augenblickswert:

$$\underline{u}(t) = \underline{\hat{u}} \cdot e^{pt} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = \hat{u} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

dabei ist

$e^{\sigma t}$...Strecker

$e^{j\omega t}$...Dreher

Abb.4

Der physikalischer Augenblickswert ist

$$u(t) = \text{Re}(\underline{u}(t)) = \hat{u} \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

1.3 Operatorenrechnung

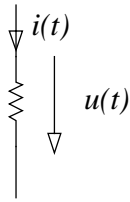
Bis jetzt haben wir immer vorweggenommen, daß man einfach mit komplexen Zahlen ein Netzwerk aus Widerständen, Kapazitäten, Induktivitäten darstellen kann.

Allgemein gilt für jede Zeitfunktion:

$$\begin{array}{l} u(t) = R \cdot i(t) \\ u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \\ i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \end{array}$$

Da uns nur sinusförmige Größen interessieren und alle Ströme und Spannungen im linearen Netzwerk mit sinusförmiger Erregung (Frequenz f) selbst wieder sinusförmig sind (Frequenz f), können wir die Rechnung vereinfachen.

ohmscher Widerstand:



$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re}(\hat{i} \cdot e^{j\omega t}) \\ u(t) &= \operatorname{Re}(\hat{u} \cdot e^{j\omega t}) = R \cdot i(t) = R \cdot \operatorname{Re}(\hat{i} \cdot e^{j\omega t}) = \\ &= \operatorname{Re}(\hat{u} \cdot e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(R\hat{i} \cdot e^{j\omega t}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{u} = R \cdot \hat{i}}$$

$$\hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} = R \cdot \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \Leftrightarrow \varphi_i = \varphi_u$$

$$\hat{u} = R \cdot \hat{i} \quad \varphi_i - \varphi_u = 0$$

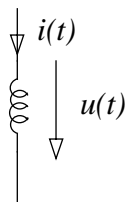
oder mit den Effektivwerten: $\boxed{U = R \cdot I}$

Bei einem ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase.

Induktivität:

Bei der Einführung der komplexen Frequenz trat anstelle des „Drehers“ $e^{j\omega t}$ der „Drehstrecker“ e^{pt} . Man kann daher in linearen Netzen Ströme und Spannungen auch durch diese Drehstrecker darstellen (analytische Erweiterung).

Anmerkung: Alle p (komplexe Frequenz) sind komplex und daher zu unterstreichen



$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re}(\hat{i} \cdot e^{pt}) \\ u(t) &= \operatorname{Re}(\hat{u} \cdot e^{pt}) = L \cdot \frac{d \operatorname{Re}(\hat{i} \cdot e^{pt})}{dt} = \operatorname{Re}(L \cdot \hat{i} \cdot \frac{de^{pt}}{dt}) = \\ &= \operatorname{Re}(\hat{u} \cdot e^{pt}) = \operatorname{Re}(L \cdot \hat{i} \cdot p \cdot e^{pt}) \end{aligned}$$

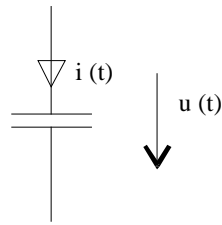
$$\boxed{\hat{u} = p \cdot L \cdot \hat{i}}$$

oder mit den Effektivwerten: $\underline{U} = p \cdot L \cdot \underline{I} \Rightarrow \frac{U}{I} = p \cdot L = j\omega L = \underline{Z}$

Bei einer Induktivität eilt die Spannung dem Strom um $\pi/2$ vor (bei harmonischer Schwingung)

Kapazität:

Die selbe Vorgehensweise kann auch bei der Kapazität vorgenommen werden.



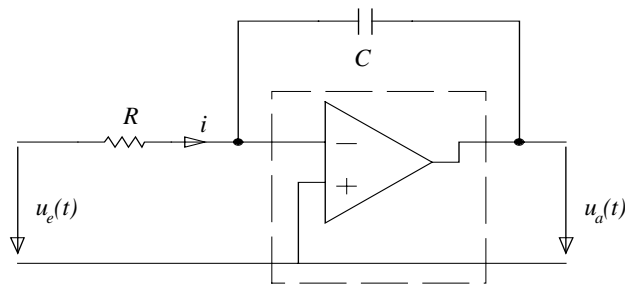
$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re}(\hat{i} \cdot e^{pt}) = C \cdot \frac{d \operatorname{Re}(\hat{u} \cdot e^{pt})}{dt} = \operatorname{Re}\left(C \cdot \hat{u} \cdot \frac{de^{pt}}{dt}\right) = \\ &= \operatorname{Re}(\hat{i} \cdot e^{pt}) = \operatorname{Re}(C \cdot \hat{u} \cdot p \cdot e^{pt}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{i} = p \cdot C \cdot \hat{u}}$$

oder mit den Effektivwerten: $\underline{I} = p \cdot C \cdot \underline{U} \Rightarrow \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{pC} \stackrel{\sigma=0}{=} \frac{1}{j\omega C} = \underline{Z}$

Bei einer Kapazität eilt der Strom der Spannung um $\pi/2$ vor

Normalerweise müßten wir um Ströme und Spannungen in einem Netzwerk berechnen zu können, eine Differentialgleichung aufstellen und diese dann lösen. Da wir einmal vorausgesetzt haben, daß wir uns auf sinusförmigen Größen beschränken, vereinfacht sich die Rechnung von einer Differentialgleichung zu einer algebraischen Gleichung, die eigentlich kein Problem bei der Lösung darstellen sollte.



$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{u_e(t)}{R} \\ u_c(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ u_a(t) &= -u_c(t) = -\frac{1}{RC} \int u_e(t) dt \end{aligned}$$

Berechnung siehe nächste Seite !!

Für **sinusförmige** Größen:

$$\begin{aligned}
 u_e(t) &= \operatorname{Re}\{\underline{u}_e \cdot e^{j\omega t}\} \\
 u_a(t) &= -\frac{1}{RC} \int \operatorname{Re}\{\underline{u}_e \cdot e^{j\omega t}\} dt = -\frac{1}{RC} \operatorname{Re}\left\{\underline{u}_e \cdot \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}\right\} \\
 \operatorname{Re}\{\underline{u}_a \cdot e^{j\omega t}\} &= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{RC} \cdot \underline{u}_e \cdot \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}\right\} \\
 \underline{u}_a \cdot e^{j\omega t} &= -\frac{1}{RC} \cdot \underline{u}_e \cdot \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \\
 \Downarrow \\
 \underline{u}_a &= -\frac{1}{RC} \cdot \underline{u}_e \cdot \frac{1}{j\omega} \\
 \frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_e} &= -\frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{j\omega\tau} = -\frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_g}}
 \end{aligned}$$

Aufgrund das in einem linearen System bei Anregung mit sinusförmigen Größe an jedem Punkt des Netzwerkes wieder eine sinusförmige Größe gleicher Frequenz auftritt, kann die Ausgangsspannung auch als sinusförmig angenommen werden.

Da definitionsgemäß zwei Realteile nur gleich sind wenn ihre Argumente gleich sind, kann die Realteilbildung entfallen. Schließlich erhält man eine Funktion die nur mehr eine Funktion der Frequenz ist.

Aus der obigen Beziehung erhält man, wenn man eine sinusförmige Spannung an den Eingang legt, eine sinusförmige Spannung gleicher Frequenz, jedoch anderer Amplitude und Phasenlage.

1.4 Komplexe Zeigerrechnung als Transformation

Dieser Punkt soll zur Übersicht der Transformationen zwischen dem Zeitbereich und dem Frequenzbereich dienen

	Zeitbereich	○—●	Frequenzbereich	
	$i(t)$	○—●	\hat{I}	
	$i_1(t) + i_2(t)$	○—●		}
$\hat{I}_1 + \hat{I}_2$	$\lambda \cdot i(t)$	○—●	$\lambda \cdot \hat{I}$	
	$\frac{di(t)}{dt}$	○—●	$j\omega \hat{I}$	
	$\int i(t) dt$	○—●	$\frac{1}{j\omega} \hat{I}$	

Die letzten zwei Transformationen zeigen, daß man eine wichtige Vereinfachung bei der komplexen Zeigerrechnung vornehmen kann:

Diff.gleichung $\circ \rightarrow \bullet$ algebr.Gleichung

2. Fourierreihe - Fouriertransformation

2.1 Fourierreihe

2.1.1 Reelle Fourierreihe

Sehr oft begegnen wir in der Elektronik mehr oder weniger komplizierten Zeitfunktionen wie bspw. einer Folge von Rechteckpulsen, die einen *periodischen* Verlauf aufweisen. Fourier zeigte, daß man periodische Funktionen durch eine Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen darstellen kann. Dies führt auf die bekannte Fourierreihe eines periodischen Signales:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)]$$

Der Gleichanteil ist definiert als

$$C_0 = \frac{A_0}{2}$$

Wie man sich durch Nachrechnen überzeugen kann, erhält man die Amplituden A_n und B_n , wenn man die obige Gleichung mit $\frac{2}{T} \cos(n\omega_1 t)$ oder $\frac{2}{T} \sin(n\omega_1 t)$ multipliziert und über eine Periode des Signals, bspw. über $[0, T]$ integriert.

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad \text{und} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$

Man kann die Summe von Cosinus- und Sinusschwingungen durch eine Summe von Cosinus- bzw. Sinusschwingungen bestimmter Phasenlage wie folgt ersetzen

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

bzw.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \sin(n\omega_1 t + \psi_n)$$

mit folgenden Zusammenhänge (siehe Abb.5)

$$|\underline{C}_n| = \frac{1}{2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

und

$$\varphi_n = \arctan\left(-\frac{B_n}{A_n}\right) \quad \text{bzw.} \quad \psi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$$

Ist $f(t)$ eine gerade Funktion, also $f(-t) = f(t)$, so treten in der Gleichung $f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)]$ wegen $B_n = 0$ nur Cosinusglieder auf.

Ist das Signal $f(t)$ dagegen ungerade, also $s(-t) = -s(t)$, so besteht die Gleichung nur aus Sinusgliedern, da $A_n = 0$. Bei allen übrigen Funktionen treten Sinus- und Cosinusglieder gemeinsam auf.

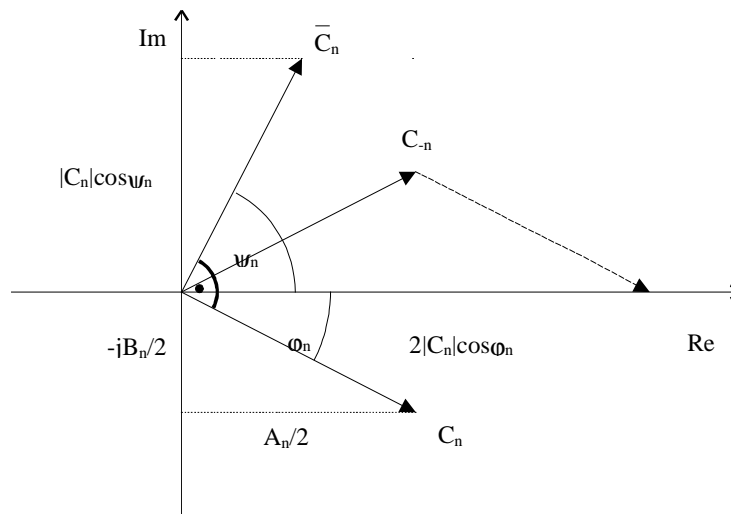


Abb.5

2.1.1 Komplexe Fourierreihe

Mit Hilfe der Gleichungen

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\sin x = -j\frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx})$$

wird aus der reellen Fourierreihe die komplexe Fourierreihe,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t}$$

wobei sich die komplexen Amplituden \underline{C}_n , auch als *Fourierkoeffizienten* bezeichnet, wie folgt berechnen lassen:

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

Diese Formel läßt sich folgendermaßen anschaulich erklären:

Allgemein gilt nämlich:

$$\frac{1}{T} \int_{\text{Per.}} e^{jm\omega_1 t} \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

stellt man sich nun die Funktion wie folgt vor:

$$f(t) = (\dots + \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t} + \dots)$$

und multipliziert sie mit $e^{-jn\omega_1 t}$, so wird das Produkt mit \underline{C}_n gleich 1 und der Fourierkoeffizient bleibt über, da die anderen Summanden 0 ergeben.

2.1.2 Zusammenhang zwischen komplexe- und reelle Fourierreihe

Wie aus Abb.5 ersichtlich ist, ist

$$\underline{C}_n = \frac{1}{2}(A_n - jB_n)$$

bzw. der konjugiert komplexe Zeiger

$$\underline{C}_{-n} = \underline{C}_n^* = \frac{1}{2}(A_n + jB_n)$$

Wie schon vorher erwähnt ist

$$|\underline{C}_n| = \frac{1}{2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

Die Formel kann nun auch mit dem konjugiert komplexen Zeiger angeschrieben werden:

$$|\underline{C}_n| = \frac{1}{2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \sqrt{\underline{C}_n \underline{C}_n^*}$$

Es besteht auch folgender Zusammenhang, der auch in der Abbildung 5 ersichtlich ist:

$$A_n = \underline{C}_n + \underline{C}_{-n} = 2 \operatorname{Re}\{\underline{C}_n\} = 2|\underline{C}_n| \cos \varphi_n$$

und

$$B_n = j(\underline{C}_n - \underline{C}_{-n}) = -2 \operatorname{Im}\{\underline{C}_n\} = -2|\underline{C}_n| \sin \varphi_n$$

wenn $n=0$, läßt sich folgende Vereinfachung durchführen

$$A_0 = 2C_0 \quad B_0 \text{ existiert nicht}$$

$$\underline{C}_n = \frac{\Theta}{T} \cdot \frac{\sin n\omega_1 \frac{\Theta}{2}}{n\omega_1 \frac{\Theta}{2}}$$

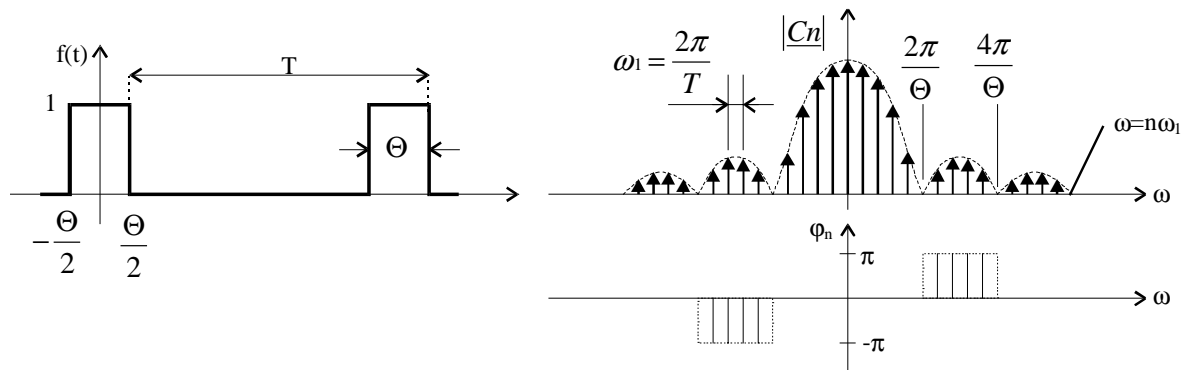


Abb.6

2.2 Fouriertransformation

Bei der Entwicklung eines *periodischen* Signal in eine Fourierreihe erhalten wir eine Summe von harmonischen Schwingungen mit einem Frequenzabstand von $\Delta\omega$

Ein nicht periodisches Signal kann man als periodisches Signal mit der Periode $T \rightarrow \infty$ auffassen.

Wir gehen zuerst vom Spektrum der komplexen Fourierreihe aus:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

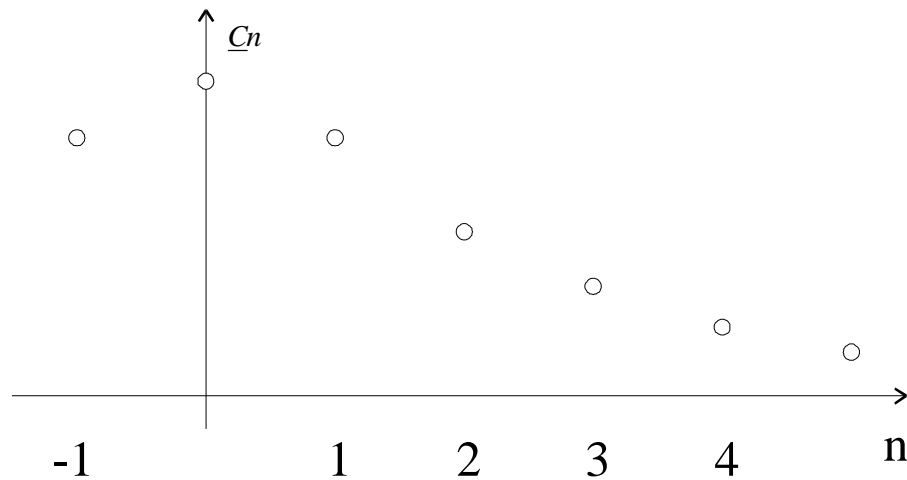


Abb.7

In diese Formel setzen wir das Integral zur Berechnung von \underline{C}_n ein. Mit $\omega_1 = \Delta\omega$ erhalten wir dann:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-jn\Delta\omega\tau} d\tau \right] e^{jn\Delta\omega t} \right\}$$

Diese Formel wird nun mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ erweitert:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{T} \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-jn\Delta\omega\tau} d\tau \right] \cdot e^{jn\Delta\omega t} \right\} \cdot \Delta\omega$$

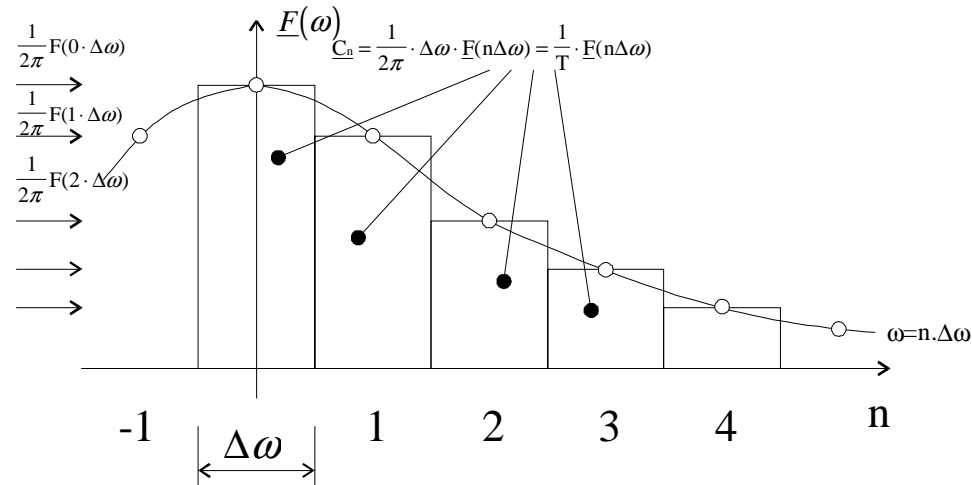


Abb.8

Anschaulich ist das eine Summe von Rechtecken.

Macht man diese Rechtecke nun immer schmaler (im Zeitbereich bedeutet das, daß die Periode des Zeitsignales immer größer wird), wird aus der Summe der Rechteckflächen die Fläche unter der Funktion $F(\omega)$.

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{f}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

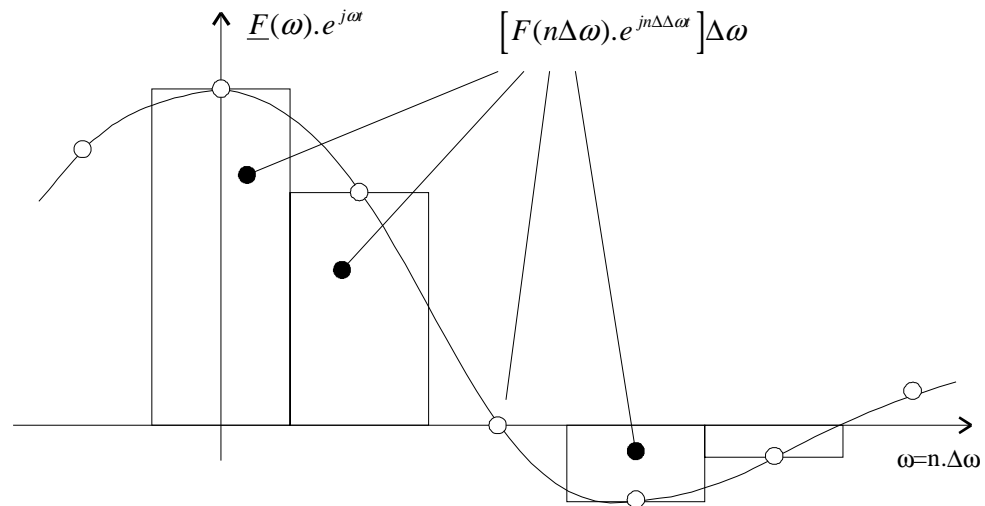


Abb.9

Aus der Fourierreihe wurde das Fourierintegral.

Im folgenden Kasten sind die beiden wichtigen Fourierintegrale noch einmal zusammengefaßt.

Die erste Gleichung wird als Fouriertransformation bezeichnet - die Zeitfunktion $f(t)$ wird in den Frequenzbereich „transformiert“, wo ihr die Amplitudendichte $F(\omega)$ entspricht. Die zweite Gleichung wird als Fourier-Rücktransformation bezeichnet.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

In der Nachrichtentechnik werden meist die zwei Formel in der allgemeinen Form angeschrieben:

mit

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}$$

wird dann

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Wie man in Abb.8 und der Formel gut erkennen kann, besitzt das einzelne Rechteck die Höhe $\frac{1}{2\pi} F(n\Delta\omega)$. Multipliziert man diesen Wert mit $\Delta\omega$, so erhält man die Fläche des Rechteckes.

Durch diese Herleitung kann man schön den Zusammenhang zwischen $F(n\Delta\omega)$ und \underline{C}_n erkennen. Schlußendlich kann folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\underline{C}_n = \frac{2\pi\alpha}{T} F(n\omega_1)$$

Durch diesen Zusammenhang kann man, wenn das Spektrum eines (Einzel)Impulses bekannt ist, sofort die Fourierreihe eines Pulses, sprich eine periodische Impulsfolge, erhalten !!

B. Rechteckimpuls - Diracimpuls

3. Rechteckimpuls

3.1 Zeitbereich

Definition:

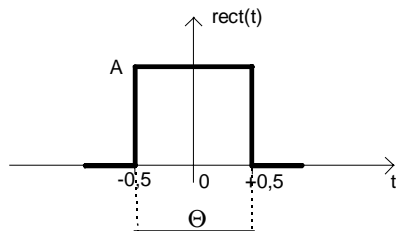


Abb.10

für $|t| \leq 0,5(-t1)$: $\rightarrow \text{rect}(t)=1$
 für $|t| > 0,5(+t1)$: $\rightarrow \text{rect}(t)=0$

3.2 Frequenzbereich

Berechnung des Frequenzspektrums dieses Rechtecks:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-t1}^{+t1} A \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{2\pi\alpha} \cdot \frac{A}{j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-t1}^{+t1} = -\frac{A}{2j\pi\alpha\omega} \cdot (e^{-j\omega t1} - e^{+j\omega t1})$$

mit

$$\sin x = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx})$$

erhält man:

$$F(\omega) = \frac{A}{\pi\alpha\omega} \sin(\omega t1) = \frac{A}{\pi\alpha\omega} \sin\left(\omega \frac{\Theta}{2}\right) \dots \dots \text{mit } \frac{t1}{t1} \text{ multipliziert } \Rightarrow$$

$$F(\omega) = \frac{A\Theta}{2\pi\alpha} \cdot \frac{\sin \omega \frac{\Theta}{2}}{\omega \frac{\Theta}{2}}$$

Als Ergebnis erhält man also eine sogenannte-

SI-Funktion:

Nullstellenberechnung: 0-Stellen sind vorhanden wenn gilt:

$$\omega t_1 = \pm n\pi$$

$$\omega \frac{\Theta}{2} = n\pi$$

$$\omega = n \frac{2\pi}{\Theta}$$

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi\alpha} \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{\Theta}{2}\right)}{\omega \frac{\Theta}{2}}$$

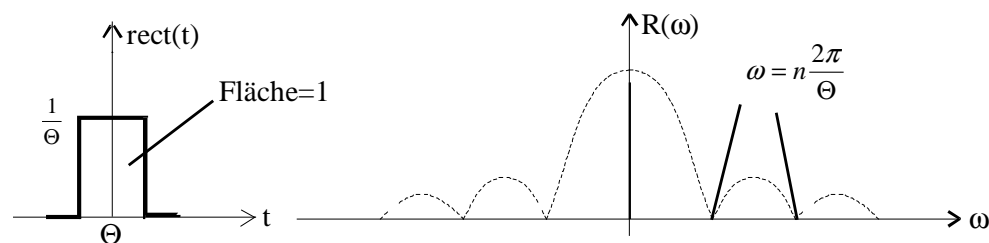
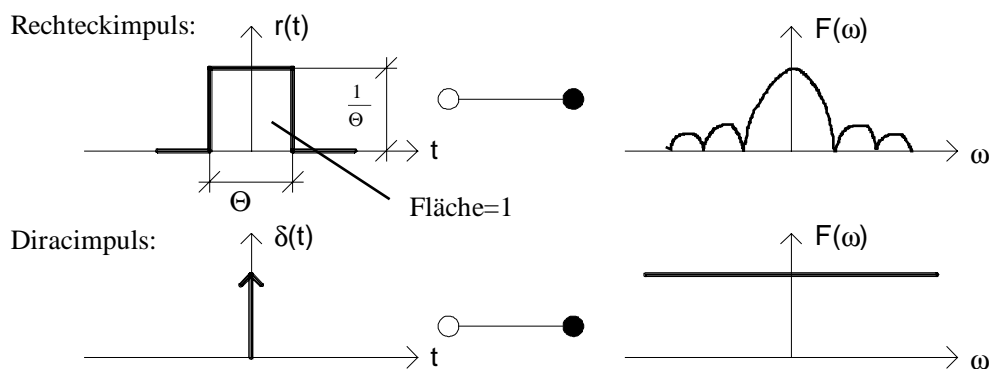


Abb.11

4. Diracimpuls

Macht man den Rechteckimpuls schmaler, so wirkt sich diese Verschmälerung so auf die Übertragungsfunktion des System aus, daß die Nullstellen immer weiter nach außen wandern. Beim Dirac-Impuls erhält man dann schließlich ein konstantes Spektrum.

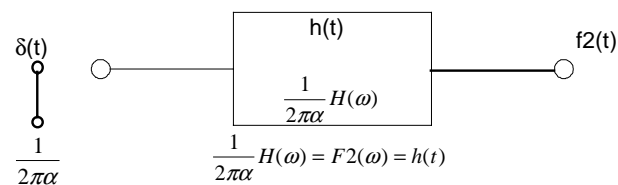
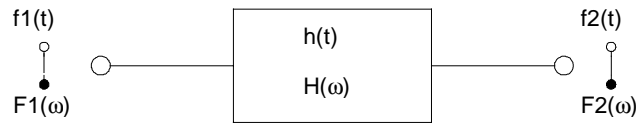
Um von einem Rechteckimpuls zu einem Diracimpuls zu gelangen, muß man die Impulsdauer Θ bis Null verkleinern.



4.1 Anwendung

Berechnung der Systemantwort über den Frequenzbereich:

Mit Hilfe des Dirac-Impulses läßt sich die Übertragungsfunktion eines Systemes ermitteln: allgemein gilt nämlich:

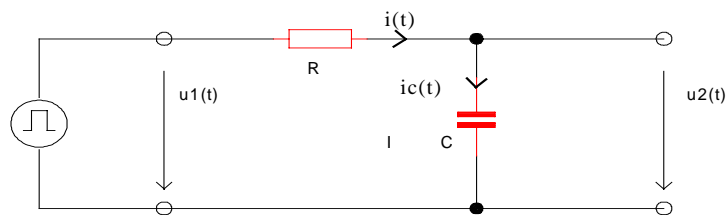


$h(t)$... Impulsantwort

C Faltung

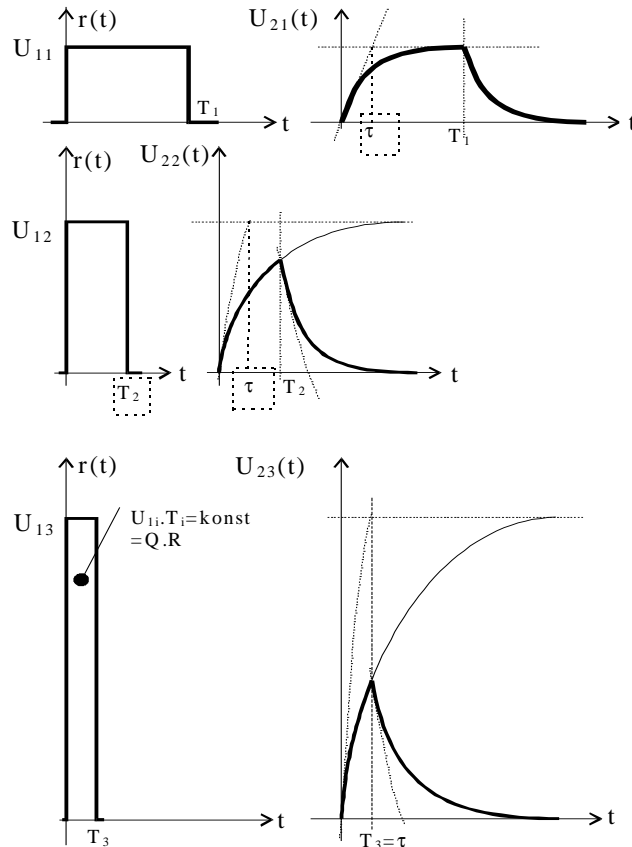
5. Theorie

Zunächst wird die Impulsantwort eines Tiefpasses untersucht:

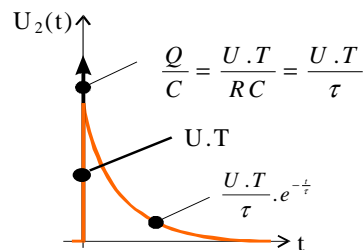


$$i(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R} = i_c(t)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt = \frac{1}{RC} \int (u_1 - u_2) dt$$



Impulsantwort des TP



Für sehr „**schmale**“ Impulse gilt folgendes:

$$T \ll \tau, U_2 \ll U_1 \Rightarrow i = \frac{U_1}{R} = \text{konst}$$

$$U_2(t) = k \cdot t = \frac{U_1}{\tau} t \dots \text{Gerade}$$

$$Q = i \cdot T = \frac{1}{R} U_1 \cdot T$$

$$U_{2 \max} = \frac{U_1}{\tau} T = \frac{U_1}{RC} T = \frac{Q}{C}$$

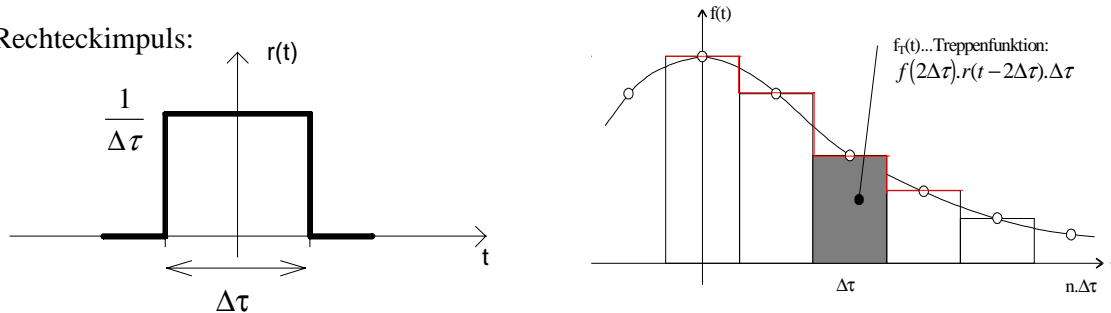
Je kürzer die Dauer des Eingangspulses $r(t)$ bei konstantgehaltener Fläche wird, umso mehr nähert sich das Ausgangssignal einer Form, die nur noch von den Eigenschaften des Übertragungssystems und nicht mehr von der Dauer des Eingangsimpulses abhängt, an.

6. Faltungsintegral:

Die Berechnung der Systemantwort im Zeitbereich:

Darstellung des Eingangssignal als eine Summe von Rechteck- / Diracimpulsen:

Rechteckimpuls:



Aufgrund dieser Erkenntnisse, kann man jetzt, von $so(t)$ ausgehend, die Reaktion $g(t)$ des Systems, auf ein beliebiges Eingangssignal $s(t)$ näherungsweise bestimmen. Dabei nähert man das gegebene Eingangssignal mit lauter amplitudenbewerteten Rechteckimpulsen an, sodaß man eine Treppenfunktion $f_T(t)$ erhält.

Es gilt nun für $f_T(t)$:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta\tau) r(t - n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau$$

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f_T(t) = f(t)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

$$\Rightarrow f(t) * \delta(t)$$

$\delta(t-\tau)$... sind Dirac-Impulse, die mit $f(\tau)$ bewertet werden und um τ zeitverschoben sind.

Es gilt nun für $g_T(t)$:

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta\tau)\rho(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$$

$$\boxed{g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau) d\tau = f(t)*h(t)} \dots \text{allgemeines Faltungsintegral}$$

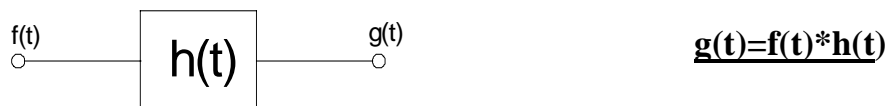
$\rho(t)$ Antwort auf einen Rechteckimpuls

$h(t)$ Antwort auf einen Diracimpuls

$g(t)$ Antwort auf eine beliebige Funktion $f(t)$

6 Faltungsalgebra

Diese Faltungsintegrale, die wie man sieht eine Verknüpfung zwischen der Reaktion $g(t)$, eines Systems, seiner Stoßantwort $h(t)$ und dem Eingangssignal $f(t)$ herstellt, kann man auch abkürzend als sogenanntes **Faltungsprodukt** anschreiben:



Das Operationszeichen in der Gleichung heißt Faltungsstern. Die Operation der Faltung ist nach den selben Rechenregeln wie die Multiplikation zu verwenden.

Es gilt das:

- Kommutativgesetz:

$$g(t) = s(t) * h(t) = h(t) * s(t)$$

- Assoziativgesetz:

$$f(t) * s(t) * h(t) = [f(t) * s(t)] * h(t) = f(t) * [s(t) * h(t)]$$

- Distributivgesetz:

$$f(t) * [s(t) + h(t)] = [f(t) * s(t)] + [f(t) * h(t)]$$

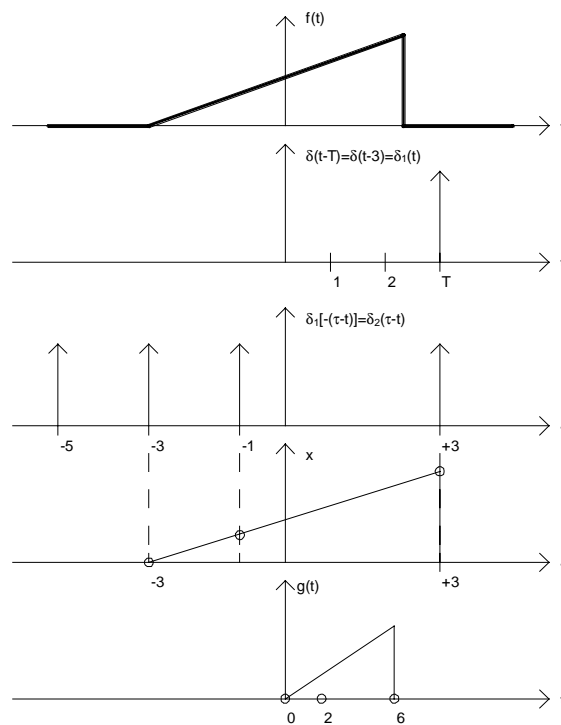
7. Beispiele

7.1 Sägezahn

Um die Gewichtsfunktion $g(t)$ eines Eingangssignales $f(t)$ zu erhalten, muß man für eine Anzahl von Zeitpunkten t das Integral (Fläche unter der Kurve) bestimmen.

Dazu formt man das Faltungsintegral um:

$$g(t) = f(t) * \delta_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta_1(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta_1[-(\tau - t)] d\tau$$



Faltung mit $\delta(t-T)$ bedeutet eine Verschiebung der Funktion um T .

6.2 Sprungfunktion

