Bernoulli Versuche

Definition:
Ein einstufiger BV ist ein Zufallsversuch mit zwei möglichen Ergebnissen die man mit Erfolg und Misserfolg bezeichnet.

Wird ein BV n-mal durchgeführt und ändert sich die W. p für Erfolg nicht, so spricht man von einem n-stufigen BV.

Definition der Binomialverteilung:
Gegeben sei ein n-stufiger BV mit der Erfolgsw. p und der Misserfolgsw. q = 1-p .
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße
X: Anzahl der Erfolge
heißt Binomialverteilung.

Die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge berechnet man mit der Formel:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$$

Erwartungswert:
Ist X die Anzahl der Erfolge bei einem n-stufigen BV mit der Erfolgsw. p, dann gilt

$$E(X) = n * p$$

Beweis für n = 1:

k	$P(X = k)$
0	$\binom{1}{0} * p^0 * (1 - p)^1 = 1 - p$
1	$\binom{1}{1} * p^1 * (1 - p)^0 = p$

$$\Rightarrow \quad E(X) = 0 * (1 - p) + 1 * p = p = n * p$$

Varianz
X sei binomialverteilt zu den Parametern n und p.
Dann gilt:

$$V(X) = n * p * q$$

$\Rightarrow$ Standartabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Gaußsche Dichtefunktion
Der Graph der Funktion mit dem Term

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

heißt Gaußsche Dichtefunktion.

Lokale Näherungsformel von Moivre und Laplace
Für große n gilt:
Wenn X zu n und p binomialverteilt ist gilt:

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma} * \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$

Diese Näherung liefert brauchbare Werte für $\sigma > 3$

Integrale Näherungsformel von Moivre und Laplace

ϕ sie eine Stammfunktion der Gaußschen Dichtefunktion φ.
X sei B(n, p).
Dann gilt bei großen n:

$$P(a \le X \le b) \approx \int_{\frac{a-\mu-0,5}{\sigma}}^{\frac{b-\mu+0,5}{\sigma}} \varphi(x)\,dx = \Phi\left(\frac{b-\mu+0,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu-0,5}{\sigma}\right)$$

Diese Näherung liefert brauchbare Werte für $\sigma > 3$

Wahrscheinlichkeiten in der n-fachen σ-Umgebung

Für einen BV mit B(n, p) gilt:

$$P(|X-\mu| \le z \cdot \sigma) \approx 2 \cdot \Phi\left(z + \frac{1}{2\sigma}\right) - 1$$

Für n >> 1 und daraus resultierendes σ >> 3 gilt daher:

$$P(|X-\mu| \le z \cdot \sigma) \approx 2 \cdot \Phi(z) - 1$$

wichtige Werte:

Radius der Umgebung	Näherungswert von P(x=k)
1,645 σ	0,90
1,96 σ	0,95
2,575 σ	0,99

Beweis:

$$P(|X-\mu| \le z \cdot \sigma) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma)$$
$$= \Phi\left(\frac{\mu + z \cdot \sigma - \mu + 0,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - z \cdot \sigma - \mu - 0,5}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{z \cdot \sigma}{\sigma} + \frac{0,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{z \cdot \sigma}{\sigma} - \frac{0,5}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(z + \frac{1}{2\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(z + \frac{1}{2\sigma}\right)\right) \quad \Big| \text{ da } \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$
$$= 2 \cdot \Phi\left(z + \frac{1}{2\sigma}\right) - 1$$

da der Term $\frac{1}{2\sigma}$ für n >>1 sehr gering wird, kann er vernachlässigt werden.

$$\Rightarrow P(|X-\mu| \le z \cdot \sigma) \approx 2 \cdot \Phi(z) - 1$$