Das Beweisverfahren "Vollständige Induktion"

Facharbeit
im Leistungsfach Mathematik

vorgelegt von

...

Gymnasium ... Schuljahr 1999/2000

Fach:	Mathematik
Kursnummer:	...
Verfasser:	...
Fachlehrer:	...
Ausgabetermin des Themas:	04.02.2000
Abgabetermin der Arbeit:	17.03.2000

____
Verfasser

Bewertung: __15__ Punkte

..., den _____________ ______________________________
Fachlehrer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Facharbeit beschäftigt sich mit dem Thema "Beweis durch vollständige Induktion". Hiermit lassen sich Sätze, Formeln, etc. in einem methodischen Vorgehen, das immer nach einem bestimmten Muster abläuft, beweisen. Dieses Verfahren ist aber auf den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen beschränkt.

Ich habe dieses Thema unter anderem deshalb ausgewählt, weil es mich reizte, über etwas zu schreiben, mit dem ich vorher nicht viel anfangen konnte. Diesem Gebiet der Mathematik, nämlich die Theorie von Beweisverfahren, war ich in meinem bisherigen Mathematikunterricht eigentlich noch nicht begegnet. Ich sah also die Möglichkeit, mich im Rahmen dieser Facharbeit intensiver mit diesem Thema zu befassen und war neugierig, ob mein anfängliches Interesse auch beständig sein würde.

Im zweiten Kapitel wird auf grundlegende Beweisansätze in der Mathematik eingegangen. Im dritten Kapitel habe ich mit dem Hintergrund des Inhalts des zweiten Kapitels das eigentliche Verfahren in aller Ausführlichkeit anhand eines Anwendungsbeispiels vorgestellt. Im vierten Kapitel werden mit den Eigenschaften der natürlichen Zahlen die Grundlagen, die das Verfahren überhaupt erst ermöglichen, geklärt. Im fünften Kapitel habe ich als Anwendung der vorher untersuchten Theorie drei Beispiele aufgeführt.

Quellenangaben befinden sich zum einen hinter nahezu jedem Abschnitt und zum anderen noch einmal ausführlich im Literaturverzeichnis. Zitatbelege sind als Fußnote direkt angeführt. Die Quellen aus dem Internet sind in einem Anhang direkt verfügbar.

2 Schlussformen in der Mathematik

> "***Beweis,***
>
> ***1)*** *Logik, Wissenschaftstheorie: Darlegung der Richtigkeit (Verifikation) oder Unrichtigkeit (Falsifikation) von Urteilen durch log. oder empir. Gründe (Deduktion, Induktion). Ein B. ist somit ein gültiger Schluss aufgrund von wahren Aussagen (Prämissen , Konklusion)."* [1]

Dies ist die Definition des Begriffs *Beweis*, so wie er im Lexikon steht. Er ist also das Ergebnis eines *Schlusses*. Es gibt höchst verschiedene *Schlussformen*, nicht nur in der Mathematik. In den folgenden Kapiteln werde ich u.a. klären, in welchem Zusammenhang der *Beweis durch vollständige Induktion* einzuordnen ist.

2.1 Demonstratives Schließen (Deduktion)

In der Mathematik unterscheidet man zwischen *plausiblem Schließen* und *demonstrativem Schließen*. Die eigentlich typische Methode der Mathematik ist das Letztere, da man hier durch logische Gründe die Gültigkeit eines Urteils *demonstriert* (*zeigt*), d.h. man beweist anhand schon vorhandener Definitionen. Dieses Verfahren nennt man auch Deduktion (lat. "*Herabführung*"), weil man neue Aussagen aus schon vorhandenen, allgemeineren Aussagen herleitet. Grob gesagt ist es der *Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere*.

2.2 Plausibles Schließen (Induktion)

Die andere Methode, *plausibles Schließen*, besteht darin, dass man die aus Beobachtungen erwachsene (n) Vermutung (en) zu einer neuen Aussage formt. Dies ist eigentlich die Arbeitsweise in den Erfahrungswissenschaften (Naturwissenschaften, Psychologie; Gesellschaftsfor-

---

[1] Brockhaus Multimedial. Begriff: "Beweis".

schung), wo man aufgrund von Beobachtungen, die in irgendeiner Weise analog sind, auf eine Gesetzmäßigkeit schließt — doch kommt auch die Mathematik nicht ohne diese Verfahrensweise aus (siehe Kpt. 2.3).

Eine Form des *plausiblen Schließens* ist die Induktion (lat. "*Hinführung*"), die Beurteilung von Sachverhalten durch empirische (mit den Sinnen wahrnehmbare) Gründe. Durch Induktion begründete Aussagen bergen meistens eine hohe Wahrscheinlichkeit in sich. Ihnen kann aber keine vollständige Gewissheit zukommen, da sie nicht eindeutig bewiesen sind.

Ein anschauliches Beispiel ist die lange als gültig angesehene Hypothese "Alle Schwäne sind weiß", die durch Induktionsschluss entstanden war. Zahllose selbstständige Beobachtungen unterstützten und bekräftigten diese These, bis in Australien schwarze Schwäne entdeckt wurden und somit sämtliche Einzelfakten, die für die These sprachen, auf einen Schlag bedeutungslos wurden.[1]

Grob gesagt kann man die Induktion als *Schluss vom Besonderen auf das Allgemeine* bezeichnen, ein Gegensatz der Deduktion.

2.3 Methode der Mathematik

In der Mathematik werden beide Verfahren benötigt, obwohl ja eigentlich nur das *demonstrative Schließen* für diese Wissenschaft der "*klassischen Anwendung rein deduktiver Methoden*"[2] legitim klingt. Doch lassen sich mit lediglich dieser Arbeitsweise keine wesentlich neuen Erkenntnisse der Umwelt erschließen; hierzu ist die Induktion nötig. Man erhält durch sie zu einer neuen Erkenntnis eine Lösung, die zu einer hohen Wahrscheinlichkeit richtig ist. Später wird der mathematische Satz erst deduktiv bewiesen.

[1] vgl. Aufzählende Induktion, http://www.pyrrhon.de/epistem/aufzaehl.htm
[2] Sominskij, I.S. Die vollständige Induktion. Seite 143

> *"Das Resultat der schöpferischen Tätigkeit des Mathematikers ist demonstratives Schließen, ist ein Beweis; aber entdeckt wird der Beweis durch plausibles Schließen, durch Erraten."*[1]

Die Auseinandersetzung über die Gültigkeit des jeweiligen Verfahrens ist ein Problem in der Theorie der Logik unter kritisch rationalistischen Gesichtspunkten und soll hier nicht genauer untersucht werden.

[Quellen:(1) Brockhaus Multimedial
Kpt.2 (2) Pólya, G. Mathematik und plausibles Schließen, Band1, S.17]

3 Das Verfahren der "Vollständigen Induktion

Die *Induktion* liefert wie in Kapitel 2 erläutert keinen eindeutigen Beweisschluss. In der Mathematik ist man jedoch bestrebt, durch deduktive Methoden eindeutige Aussagen zu formulieren. Eine Möglichkeit, eine Induktionsvermutung über die natürlichen Zahlen [2] zu beweisen, bietet das auf den Eigenschaften der natürlichen Zahlen (siehe Kpt.4) beruhende Verfahren "Vollständige Induktion".

3.1 Vorstellung des Verfahrens

Grundlage des Verfahrens ist eine durch Induktion gewonnene, aber noch nicht bewiesene Aussage, von der man annimmt, dass sie für alle natürlichen Zahlen gilt. Der Beweis folgt in zwei Schritten:

1. Induktionsanfang: Man bestätigt die Vermutung für eine natürliche Zahl (der Einfachheit halber nimmt man die möglichst kleinste Zahl; die unterste Zahl, von der an ab der zu beweisende Satz zutrifft) und zeigt somit, dass es überhaupt eine natürliche Zahl gibt, für die die Behauptung gilt.

---

[1] Pólya, G. Mathematik und plausibles Schließen, Band 1, Seite 10
[2] Die natürlichen Zahlen sind alle positiven ganzen Zahlen (einschließlich der Null).

2. Induktionsschritt: Man geht von der Induktionsvoraussetzung aus, dass die vermutete Gesetzmäßigkeit für eine beliebige Zahl k gilt. Daraufhin beweist man durch algebraische Umformungen, geometrische Überlegungen oder logische Schlüsse die Induktionsbehauptung, nämlich dass die Gesetzmäßigkeit auch für die nachfolgende Zahl $k+1$ gilt.

Durch diese beiden Schritte wurde gezeigt, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt.

3.2 Beispiel für eine Anwendung der vollständigen Induktion

Beispiel: Die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen

Vorüberlegung: Durch einfaches Ausprobieren mit kleinen Zahlen ergibt sich folgendes Schema:

n	**Summe (1+3+5+ + (2n-1))** [1]
1	1
2	1 + 3 = 4
3	1 + 3 + 5 = 9
4	1 + 3 + 5 + 7 = 16

Die Beobachtung der Ergebnisse lässt eine Vermutung aufkommen, nämlich dadurch, dass diese Zahlen einem eine bekannte "Kategorie" suggerieren — sie sind den ersten Quadratzahlen n^2 jeweils gleich.

Die Vermutung wurde hier durch eine Induktion gewonnen (und ist damit noch nicht bewiesen!), Grundlage dafür war die Beobachtung der Analogie zwischen der Summe der ersten n ungeraden Zahlen und den ersten Quadratzahlen n^2 .

[1] Die n-te ungerade Zahl ist $2n$-1.

<u>Behauptung A_n</u> : Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen entspricht n^2. A_n gilt für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}^*$.[1]

<u>1.Schritt: Induktionsanfang:</u> Dieser Schritt ist eigentlich durch die Wertetabelle (s.o.) schon mehrmals ausgeführt worden, denn die Behauptung ist für $n = 1, 2, 3, 4$ bereits bestätigt worden. A_1 (bzw. A_2 , A_3 *oder* A_4) ist also wahr.

<u>2.Schritt: Induktionsschritt:</u> Die <u>Induktionsvoraussetzung A_k</u> ist in diesem Fall: Es gibt eine natürliche Zahl k , die von 0 (diese Einschränkung war schon in der Behauptung erfolgt) und von 1 (bzw. 2, 3 oder 4) verschieden ist, und für die die obige Vermutung als wahr vorausgesetzt ist.
Diese Aussage ist nicht bewiesen, sie ist nur die allgemeine Fassung des Ausdrucks im Induktionsanfang (dort wurden konkrete Zahlen eingesetzt) und wird im Induktionsschritt als Grundlage der nachfolgenden <u>Induktionsbehauptung A_{k+1}</u> verwendet.

Nun folgt der eigentliche Beweis:

Induktionsvoraussetzung A_k: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$
Induktionsbehauptung A_{k+1}: $1+ 3+ 5 + \ldots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$
Beweis:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k^2}+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

$$k^2+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

$$\underbrace{k^2+2k+1}_{1.B.F.}=(k+1)^2$$

$$(k+1)^2=(k+1)^2$$

---

[1] $\mathbb{N}^*$ bedeutet die Menge der von Null verschiedenen natürlichen Zahlen. Dies ist in diesem Fall Voraussetzung.

Somit wurde bewiesen, dass die Aussage — unter der Voraussetzung, dass sie für die beliebige Zahl *k* gilt — auch für deren Nachfolger *k+1* zutrifft. Im Induktionsanfang wurde die Gültigkeit der Aussage für einige Beispielszahlen schon gezeigt; aus dem Induktionsschritt folgt nun, dass die Aussage ebenfalls für den Nachfolger einer beliebigen Beispielszahl zutrifft. Also ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen (die Null natürlich ausgenommen) wahr.

Also gilt A_n für alle $n \in \ {}^{*}$!

[Quelle Kpt.3.1-2: (1) Hahn/Dzewas, Analysis Leistungskurs, Seite 370-374]

3.3 Die "Vollständige Induktion" als Beweis

Die Bezeichnung vollständige Induktion ist eigentlich für dieses Verfahren unpassend, da eine *Induktion* nur einen plausiblen Schluss liefert. Durch die *vollständige Induktion* wird jedoch eine Behauptung durch einen eindeutigen Beweisschluss verifiziert. Das Beweisverfahren stellt demnach eine Form der *Deduktion* dar. Trotzdem besitzt sie auch *induktiven* Charakter!

Durch die Zweiteilung des Verfahrens wird deutlicher, wo Unterschiede liegen: Im 1. Schritt oder Induktionsanfang wird eine durch Induktion hergeleitete Aussage gemacht, zu der man durch eine Analogiebeobachtung (beim Ausprobieren verschiedener Zahlen) gelangt ist; das Einsetzen der (möglichst kleinen) Beispielszahl ist jedoch ein deduktiver Beweis des behaupteten Satzes für diese spezielle natürliche Zahl.

Im 2. Schritt oder Induktionsschritt folgt dann der ebenfalls deduktive Beweis der Behauptung, "*daß aus der Gültigkeit der Behauptung für n auch die Richtigkeit für n+1 folgt. Aus diesem Grunde wird diese Methode gelegentlich 'Schluss von n auf n+1' genannt.*" [1]

[1]Sominskij, I.S. Die vollständige Induktion. Seite 144

Insgesamt lässt sich sagen, dass mit dieser Beweismethode eine Induktionsaussage deduktiv bewiesen wird, die *Induktion* wird (mathematisch) *vervollständigt*!
Eine Veranschaulichung dafür, dass beide Schritte der vollständigen Induktion zwingend notwendig sind, ist eine Reihe aufgestellter Domino Steine, bei denen eine Kettenreaktion ausgelöst wird. Hier muss ein Stein angestoßen sein, der dann den nächsten Stein umstößt. Ist dies nicht der Fall, so fällt gar nichts um. Wenn irgendein Stein in der Reihe die Bewegung nicht weitergibt, dann kommt die Kettenreaktion zum Stillstand.

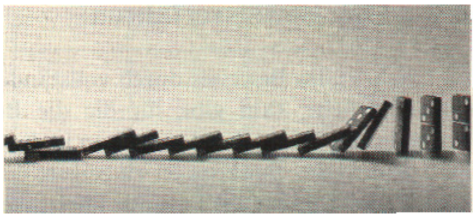

Abbildung 1[1]

[Quellen Kpt.3.3: (1) Pólya, G. Mathematik und plausibles Schließen, Band1, S.170-171]
(2) Sominskij, I.S. Die vollständige Induktion. S. 144-146]
(3) Hahn/Dzewas, Analysis Leistungskurs, S. 370-374]

4 Ergänzungen zur "Vollständigen Induktion"

4.1 Die Peano-Axiome[2]

Die vorgestellte Beweismethode *Vollständige Induktion* ist nur zulässig für den Zahlenbereich , also für alle positiven ganzen Zahlen einschließlich der Null. Auf andere Zahlenmengen ist die vollständige Induktion nicht anwendbar.

---

[1]Hahn/Dzewas, Analysis Leistungskurs, S. 373
[2] Axiom: Ein nicht aus Sätzen ableitbarer und beweisbarer Grundsatz.

Die Eigenschaften der natürlichen Zahlen legte der italienische Mathematiker Guiseppe Peano[1] in den nach ihm benannten *Peano-Axiomensystem* fest:

P1: *Null ist eine natürliche Zahl.*

P2: *Der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ist auch eine natürliche Zahl.*

P3: *Null kann nicht auf eine natürliche Zahl folgen.*

P4: *Zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger, oder: Wenn auf zwei Zahlen dieselbe Zahl folgt, so sind sie identisch.*

P5: *Wenn eine Menge die Zahl Null enthält, und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, so enthält sie jede natürliche Zahl.*

[vgl.: Oberschelp, Arnold. Aufbau des Zahlensystems. Seite 14-15]

Das Axiom P5 wird auch das *Induktionsaxiom* genannt, da es die Anwendbarkeit des Prinzips der vollständigen Induktion bei den natürlichen Zahlen zu Grunde legt. Es ist sozusagen der Grundstein für dieses Prinzip. Dies möchte ich ein wenig erläutern:

In der obigen Formulierung von P5 ist von einer Menge die Rede, die genau dann die gesamte Zahlenmenge umfasst, wenn in ihr die Null sowie der Nachfolger jeder auch zu ihr gehörenden natürlichen Zahl enthalten ist. Leichter verständlich wird dies, wenn man es ein wenig umformuliert, indem man sich nicht auf eine Menge bezieht, die irgendwelche Zahlen enthält, sondern auf eine Eigenschaft, die auf irgendwelche Zahlen zutrifft:

Wenn Null eine bestimmte Eigenschaft hat, und wenn jeder Nachfolger einer natürlichen Zahl diese Eigenschaft besitzt, sofern die natürliche Zahl selbst die Eigenschaft hat, dann haben alle natürlichen Zahlen diese betreffende Eigenschaft. [2]

---

[1] Geboren: Cuneo 27.8.1858. Gestorben: Turin 20.4.1932.

[2] vgl.: Guiseppe Peano, http://www.pyrrhon.de/philos/peano.htm

In dieser Ausdrucksweise erinnert P5 schon eher an das Prinzip der vollständigen Induktion: Damit es bewiesen ist, dass alle natürlichen Zahlen eine bestimmte Eigenschaft besitzen, so müssen zwei Voraussetzungen erfüllt sein, nämlich muss die Eigenschaft auf Null (Induktionsanfang) und auf jeden Nachfolger einer natürlichen Zahl (Induktionsbehauptung) — unter der Bedingung, dass sie für diese natürliche Zahl auch gültig ist (Induktionsvoraussetzung) — zutreffen.

[Quelle Kpt.4.1: (1) Oberschelp, A. Aufbau des Zahlensystems. S.14-18]

4.2 Geschichte der "Vollständigen Induktion"

Zum ersten Mal wurde 1575 ein formaler Beweis durch vollständige Induktion in der Öffentlichkeit angegeben. Der italienische Geistliche *Franciscus Maurolicus* (16.9.1494 - 21./22.7.1575), der als größter Geometer des 16.Jahrhundert angesehen wurde, zeigte in seinem Buch *Arithmetik* durch vollständige Induktion, dass man die Summe der ersten n ungeraden Zahlen mit n^2 berechnen kann (siehe Kapitel 2).
1662 verwendete der heute noch bekannte französische Mathematiker *Blaise Pascal* (1623 - 1662) die vollständige Induktion, um eine Formel über die Summe von *Binomialkoeffizienten* zu beweisen und entwickelte daraus das nach ihm benannte *Pascalsche Dreieck.*[1]
1838 wurde der Name *Vollständige Induktion* für diese Beweismethode zum ersten Mal im heute gebräuchlichen Sinn benutzt, als nämlich *Augustus de Morgan* (1806 - 1871) seinen Artikel *Induction (Mathematics)* in der Londoner Zeitschrift *Penny Cyclopedia* publizierte. Aber erst im 20. Jahrhundert wurde diese Bezeichnung allgemein in der Welt anerkannt und verwendet.

[Quelle Kpt.4.2: (1) Hebisch, Udo, Prof. Dr. rer. nat. Vollständige Induktion.
http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/induktion.html.]

[1]Diese mathematischen Begriffe möchte ich an dieser Stelle nicht weiter erläutern.

5 Anwendungsaufgaben der "Vollständigen Induktion"

5.1 Beispiel 1

Einführung: Gesucht ist eine Formel um die Summe dieser Folge zu berechnen: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

Für $n=1$ errechnet man die Summe als $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$,

für $n=2$ beträgt sie $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

und für $n=3$ folgt $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$.

Hieraus erwächst die Vermutung, dass für eine beliebige natürliche Zahl n die Summe $\frac{n}{n+1}$ beträgt.

Behauptung: Die Summe $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ ist gleich $\frac{n}{n+1}$ für $n \qquad ^{*}$.

Induktionsanfang: Für $n=1$ trifft die Vermutung zu, die Summe ist $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: Es gilt die Induktionsvoraussetzung für die beliebige Zahl k: $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{k}{k+1}$.

Zu beweisen ist, dass die Induktionsbehauptung für die Zahl $k+1$ wahr ist: $\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{k+1}{k+2}$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}\overset{1.B.F.}{=}\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Die Aussage $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ gilt also für alle natürlichen Zahlen n.

[Quelle Kpt.5.1: (1) Sominskij, I.S. Die vollständige Induktion. Seite 14-15]

5.2 Beispiel 2

Einführung: Dieses Beispiel ist eher ein Gedankenexperiment als eine zu berechnende Aufgabe. Hier wird die vollständige Induktion falsch angewendet, es wird mittels dieses Verfahrens ein offensichtliches Paradoxon "bewiesen".
Es steht die Behauptung im Raum, dass n beliebige Schüler den gleichen Rucksack in der Schule bei sich haben.

Induktionsanfang: Für den Fall $n=1$ muss man nicht lange nachdenken, diese Tatsache (auch: *Leersatz*) ist unbestreitbar richtig.

Induktionsschritt: Als Induktionsvoraussetzung wählt man als beliebige Zahl k die 3. Die Induktionsbehauptung für $k+1$ ist demnach, dass 4 Schüler denselben Rucksack besitzen.
Der Beweis sieht folgendermaßen aus: Die Schüler A, B sowie C haben nach Voraussetzung denselben Rucksack ($n=3$). Auch für die Schüler B, C und D trifft dies aufgrund der Voraussetzung zu. Demnach haben also alle vier denselben Rucksack.
Somit ist der Übergang von n auf $n+1$ bewiesen und da der Übergang von 4 auf 5 jetzt auch nicht mehr viel schwerer aussieht, scheint es, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen richtig ist.

Lösung des Problems: Von dem Übergang von 3 auf 4 ausgehend ist der allgemeine Übergang von n auf $n+1$ für (fast) alle natürlichen Zahlen anwendbar; er versagt aber logischerweise beim Übergang von 1 auf 2.

Hier lässt sich das oben benutzte Gedankenexperiment nicht anwenden. Daher sind die Kriterien für eine vollständige Induktion nicht erfüllt —
Es wurde mittels einer (scheinbaren) vollständigen Induktion eine Falschaussage gemacht!

[Quelle Kpt.5.2: (1) Pólya, G. Mathematik und plausibles Schließen, Band1, S.183 u. S.353]

5.3 Beispiel 3 (mithilfe des TI-83)

Vorüberlegungen: Gesucht ist eine Formel zur Berechnung der Summe $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$, also der Quadrate der ersten natürlichen Zahlen *n*.
Als bekannt vorausgesetzt müssen für diesen Beweis die Summenformel der ersten *n* natürlichen Zahlen $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ sowie der Gebrauch des TI-83 zum Lösen eines Gleichungssystems sein.
Aufgrund der ersten Voraussetzung lässt sich die Vermutung aufstellen, dass für die gesuchte Summenformel ein Polynomterm in folgender Form vorliegt: $S_n = a\cdot n^3+b\cdot n^2+c\cdot n$.

Ermittlung der Koeffizienten: Durch Ausprobieren ist bekannt:
$S_1=1$, $S_2=1+2^2=5$, $S_3=1+2^2+3^2=14$.
Daher lässt sich folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{matrix} a+b+c=1 \\ 8a+4b+2c=5 \\ 27a+9b+3c=14 \end{matrix} \text{, in Matrixform: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 5 \\ 27 & 9 & 3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten können nun mit der Matrixfunktion des TI-83 berechnet werden: $a=1/3$, $b=1/2$, $c=1/6$.
Die gesuchte (und zu beweisende) Formel lautet demnach:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Diese Zuhilfenahme des TI-83 hat also mit dem eigentlichen Beweis nichts zu tun (dieser folgt ja noch); es ist lediglich ein Weg um auf die Vermutung zu gelangen, natürlich gibt es auch andere Wege.

Behauptung: Die Summe S_n der Quadrate der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$!

Induktionsanfang: $S_1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = 1$

Induktionsvoraussetzung: $S_{k-1} = \frac{k\cdot(k-1)\cdot(2k-1)}{6}$ [1]

Induktionsbehauptung: $S_k = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$

Beweis:

$$S_{k-1} + k^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6} + k^2 = \frac{2k^3 - k^2 - 2k^2 + k + 6k^2}{6} = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6}$$
$$= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$$

Der Schluss von *k-1* auf *k* ist gezeigt, somit gilt für die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen n die Formel: $S_n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

[Quelle Kpt.5.3: (1) Heiss, P. Vollständige Induktion mit DERIVE. Mathe mit CAS
http://www.learn-line.nrw.de/Faecher/Mathematik/CAS/foyer/heiss_1.htm]

[1] Den Schluss von *k-1* auf *k* nennt man *rekursiven Schluss.*

6 Schlusswort

Es ist sicherlich keine leichte Aufgabe, auf nur 15 Seiten ein so komplexes Thema wie die "Vollständige Induktion" möglichst ausführlich vorzustellen. Die Schwierigkeit liegt unter anderem darin, aus der Menge an Informationen, die die Recherchen ergeben haben, auszuwählen, unter dem Vorbehalt, nicht zu detailliert in der Beschreibung zu werden, sodass eine Unübersichtlichkeit entsteht, sondern den Kerninhalt tiefgründig und möglichst umfassend darzulegen. Daher sind einige Bereiche, die die "Vollständige Induktion" betreffen, nicht genannt. So gibt es zum Beispiel noch einige interessante Anwendungen, wie das Farbenproblem bei Landkarten; das Ziel meiner Facharbeit ist aber die Vorstellung des Beweisverfahrens an sich. Dies würde bei solch komplexen Anwendungen aber nicht mehr im Vordergrund stehen (über sie könnte man eine weitere Facharbeit schreiben!). Deswegen habe ich als Anwendungsbeispiele auch vergleichsweise leichte Aufgaben ausgewählt, die das Verfahren aber deutlich demonstrieren.

Neu war für mich persönlich auch die genauen Quellenangaben der verwendeten Literatur, die ich bei vorherigen Arbeiten für die Schule in dieser Form noch nicht gewohnt war. Bei den Recherchen habe ich auch im Internet gesucht, verwundert hat mich hierbei, dass eine von mir gefundene Seite nach zwei Wochen schon nicht mehr verfügbar war (zum Glück hatte ich sie ausgedruckt, sodass sie im Anhang beiliegt)!

Im Vergleich zu anderen Facharbeiten aus der Mathematik sind in dieser wenig veranschaulichende Bilder, Grafiken, Diagramme, etc. und viel Text vorhanden. Dies ist auf das an sich sehr abstrakte Thema zurückzuführen.

7 Literaturverzeichnis

1. Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG. Der Brockhaus Multimedial. Version 1.0. Mannheim, 1998. (Begriffe: "Beweis", "Induktion", "Deduktion")

2. Pólya, Georg. Mathematik und plausibles Schließen. Ins Deutsche übersetzt v. Lulu Bechtolsheim. 2. Auflage. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhäuser Verlag, 1969.

3. Hahn/Dzewas. Analysis Leistungskurs. 1. Auflage. Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag GmbH, 1990.

4. Hebisch, Udo, Prof. Dr. rer. nat. Vollständige Induktion. http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/induktion.html

5. Heiss, P. Vollständige Induktion mit DERIVE. Mathe mit CAS http://www.learn-line.nrw.de/Faecher/Mathematik/CAS/foyer/heiss_1.htm

6. Oberschelp, Arnold. Aufbau des Zahlensystems. Herausgegeben von A.Kirsch und H.G.Steiner. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1968.

7. Sominskij, I.S.; Golovina, L.I. und Jaglom, I.M. Die vollständige Induktion. Übersetzt aus dem Russischen von W.Ficker, R.-D.Schröter, R.Fredersdorf und M.Schmidt. 2.Auflage. Mathematische Schülerbücherei Nr.126. Berlin, Harri Deutsch Verlag, 1991.

8. Wiedemann, Uwe. Aufzählende Induktion. Philosophie und Logik. http://www.pyrrhon.de/epistem/aufzaehl.htm

9. Wiedemann, Uwe. Guiseppe Peano. Philosophie und Logik. http://www.pyrrhon.de/philos/peano.htm

Sonstige Hilfsmittel: Graphischer Taschenrechner TI-83. Texas Instruments.

Schülererklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Facharbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Verfasser

Einverständniserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird.

Verfasser