

GRUNDLAGEN DER MECHANIK

Erklärungen, Formeln und gelöste
Übungsaufgaben der Mechanik aus
Klasse 11

von Matthias Kolodziej
shorebreak13 @ aol.com

Hagen, Westfalen
September 2002

Inhalt:

I. Kinematik

1. Geschwindigkeit
2. Beschleunigung
3. Translation
 - a) gleichförmige Bewegung
 - b) gleichmäßig beschleunigte Bewegung
4. Der freie Fall
5. der waagerechte Wurf
6. der schiefe Wurf
7. Rotation

II. Dynamik

8. Newtonsche Axiome
9. Energie
 - a) Definition
 - b) Kinetische Energie
 - c) Potentielle Energie
 - d) Spannenergie
 - e) Energieerhaltungssatz

Größen der Mechanik im Überblick
wichtige Konstanten

Übungsaufgaben

I. Kinematik – Beschreibung der Bewegung

Zur Beschreibung von Bewegung werden Messungen von Weg und Zeit durchgeführt und mit Hilfe von Koordinatensystemen und Quotientenbildung beschrieben.

1.) Geschwindigkeit:

den Quotienten aus Weg und Zeit bezeichnet man als Durchschnittsgeschwindigkeit.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad [v] = \frac{m}{s}$$

2.) Beschleunigung:

Den Quotienten aus der Geschwindigkeitsänderung und der dafür benötigten Zeit bezeichnet man als Durchschnittsbeschleunigung.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad [a] = \frac{m}{s^2}$$

3.) Translation: Körper auf gerader Bahn

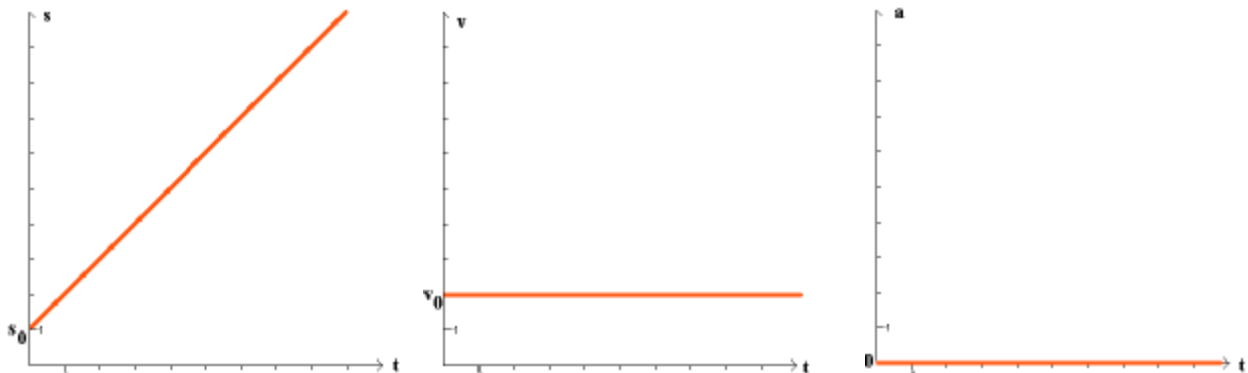
a) gleichförmige Bewegung:

Man bezeichnet eine Bewegung als gleichförmig, wenn ihre Geschwindigkeit konstant ist.

$$s = v \cdot t + s_0$$

$$v = \textit{konstant}$$

$$a = 0 \frac{m}{s^2}$$



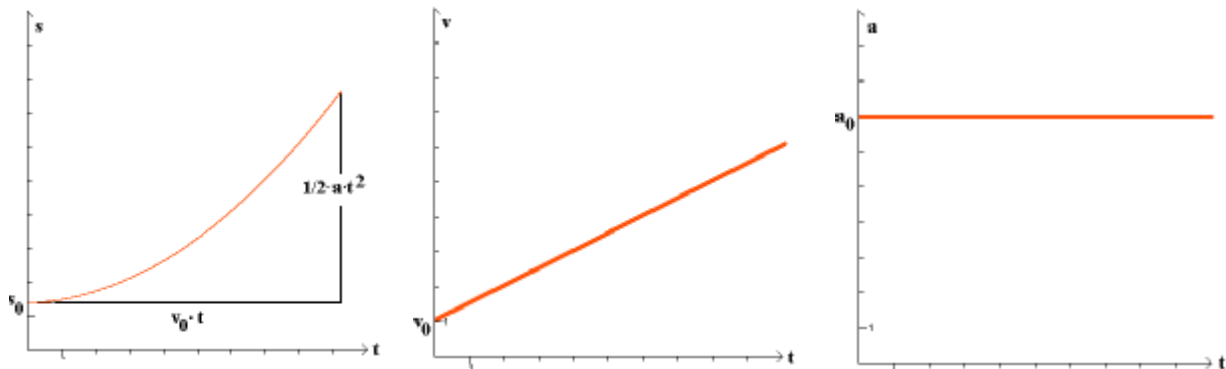
b) gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

Eine Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt, wenn $a = \text{konstant}$ und $v \sim t$.

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

$$v = a \cdot t + v_0$$

$$a = \text{konstant}$$



4.) Der freie Fall: (ohne Luftwiderstand)

Der freie Fall stellt eine konstant beschleunigte Bewegung mit

$$a = g = 9,81 \frac{m}{s^2} \quad (\text{Fallbeschleunigung auf der Erde) dar.}$$

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = g \cdot t$$

$$a = g$$

5.) Der waagerechte Wurf:

Er ist zusammengesetzt aus zwei einen rechten Winkel bildenden Bewegungen:

1. waagrecht: gleichförmige Bewegung
2. senkrecht: freier Fall

$$s_y = \frac{1}{2} g t^2$$

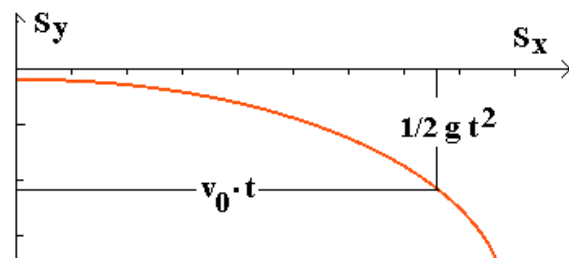
$$s_x = v_0 \cdot t$$

$$v_y = g \cdot t$$

$$v_x = v_0$$

$$a_y = g$$

$$a_x = 0 \frac{m}{s^2}$$



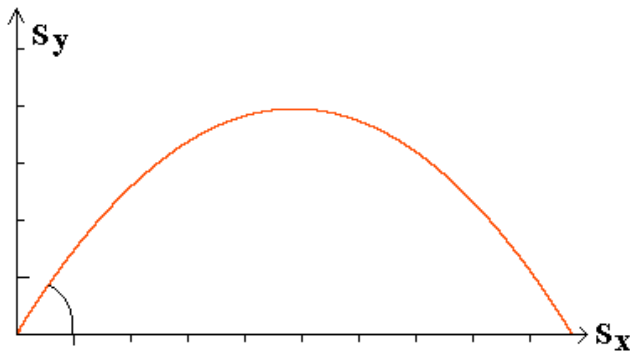
Bahnkurvenfunktion:

$$s_y = \frac{g}{2 v_0^2} \cdot s_x^2$$

Wurfweite:

$$W = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

6.) Der schiefe/schräge Wurf:



Zwei Abschlußwinkel, die gleich weit von 45° entfernt sind, erzielen bei gleichen Geschwindigkeiten die selbe Weite.

Bahngleichung:
$$s_y = s_x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot s_x^2$$

max. Steighöhe:
$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

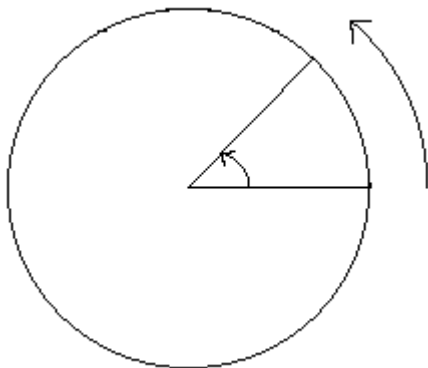
Wurfzeit/Steigzeit:
$$t_{\text{wurf}} = 2 \cdot t_{\text{steig}} = \frac{2 v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

!Sonderfall! Der senkrechte Wurf:

Der senkrechte Wurf ist ein schiefer Wurf mit einem Abschlußwinkel von 90°.

d.h.:
$$t_{\text{wurf}} = 2 \cdot t_{\text{steig}} = \frac{2 v_0}{g}$$

7.) Rotation: Kreisbewegung



Drehwinkel: φ (Phi)

Umlaufdauer: $T = \frac{t}{n} \quad [T] = s$

Frequenz: $f = \frac{n}{t} = \frac{1}{T} \quad [f] = s^{-1} = \text{Hz}$

Grundgesetze der Kreisbewegung:

Winkelgröße	Umrechnung über Radius	Bahngröße
φ	$s = r \cdot \varphi$	s
$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$	$v = \omega \cdot r$	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$
$a = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$		wenn $ \vec{v} = \text{konstant}$ $a = \frac{v^2}{r}$

II. Dynamik – Ursachen der Bewegung

8.) Newtonsche Axiome:

1. Newtonsches Axiom:

Ursache jeder Änderung des Bewegungszustandes ist das Wirken von Kräften.

2. Newtonsches Axiom:

Die wirkende Kraft und die Beschleunigung sind proportional: $F \sim a$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (\text{Grundgesetz der Mechanik}) \quad [F] = N$$

9.) Energie:

a) Definition der Energie:

Wirkt die Kraft F entlang eines Weges s , so wird dem Körper der Masse m die Energie E zugeführt mit:

$$E = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha \quad [E] = Nm = J$$

b) Bewegungs-kinetische Energie:

Wird ein Körper der Masse m aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit v beschleunigt, wird dafür die Energie E benötigt.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

c) Hub-\potentielle Energie:

Um einen Körper der Masse m senkrecht nach oben zu heben, wird die Energie E benötigt.

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

d) Spannenergie:

Die Spannenergie beschreibt den Aufwand, um eine Feder mit der Federkonstante D um die Strecke s zusammenzudrücken.

$$E_{sp} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

e) Erhaltungssatz der klassischen Physik:

In einem abgeschlossenen System ist die Summe der mechanischen Energien konstant, wenn keine Reibung zu berücksichtigen ist.

$$E_{kin} + E_{pot} + E_{sp} = E'_{kin} + E'_{pot} + E'_{sp}$$

Größen der Mechanik im Überblick

Größe	Formelzeichen	Einheit	eigener Einheitenname
Arbeit/Energie	$W \setminus E$	$J = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Joule
Beschleunigung	a	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	
Frequenz	f	$\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$	Hertz
Geschwindigkeit	v	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	
Kraft	F	$N = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Newton
Länge	s	m	Meter
Masse	m	kg	Kilogramm
Zeit	t	s	Sekunde

wichtige Konstanten:

Fallbeschleunigung:

Erde $g = 9,806\,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Sonne $g_{\text{sonne}} = 274 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Mond $g_{\text{mond}} = 1,63 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Mars $g_{\text{mars}} = 3,73 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Übungsaufgaben:

Anmerkungen: Bei vorheriger Umrechnung in, und Verwendung von, Grundeinheiten kann auf die Einheiten in der Formel verzichtet werden, wenn die endgültige Einheit beim Ergebnis in Klammern ergänzt wird.

1. Aufgabe:

Ein mit konstanter Beschleunigung anfahrender Zug hat zur Zeit $t_1 = 8\text{h } 50\text{ min}$ die Geschwindigkeit $v_1 = 5\text{ km/h}$ und zur Zeit $t_2 = 8\text{h } 53\text{ min}$ die Geschwindigkeit $v_2 = 95\text{ km/h}$. Welche Beschleunigung hat der Zug?

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{95 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{8\text{h}53\text{min} - 8\text{h}50\text{min}} \\ &= \frac{90 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{3\text{min}} \\ &= \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{180\text{s}} \\ &\approx 0,14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

2. Aufgabe:

Die Beschleunigung des ICE kann max. $a = 1,2\text{ m/s}^2$ betragen.

- Nach welcher Zeit würde danach der Zug seine Höchstgeschwindigkeit von 350 km/h erreichen, wenn er aus dem Stand gleichmäßig mit $1,2\text{ m/s}^2$ beschleunigt anfährt?
- Welche Strecke hat er zurückgelegt?
- Der Zug komme demnach auf der Strecke von 3500m aus der Höchstgeschwindigkeit zum Stillstand. Berechnen Sie die Bremsbeschleunigung und die Bremszeit.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad a &= 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ v &= 0 \\ v_1 &= 350 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 97 \frac{2}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$v_1 = v_0 + a \cdot t$$

$$97 \frac{2}{9} = 0 + 1,2 \cdot t$$

$$t = 81 \text{ (s)}$$

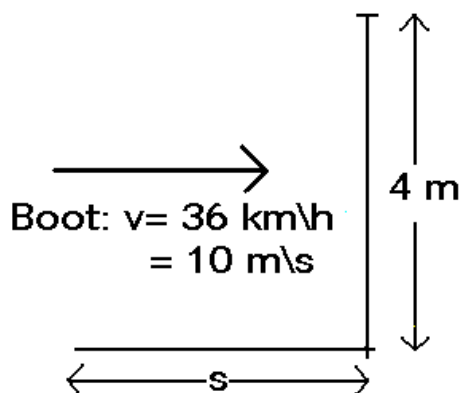
$$\begin{aligned}
 \text{b) } s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 81^2 + 0 \cdot 81 + 0 \\
 &= 3.937 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } t &= \frac{v}{a} - \\
 &= \frac{97 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,2} \\
 &= 81,4 \text{ (s)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \wedge \quad v = a \cdot t \\
 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v}{a} \right)^2 \\
 3500 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{97}{a} \right)^2 \\
 a &= -1,35 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)
 \end{aligned}$$

3. Aufgabe

Für eine Filmszene muß sich ein Stuntman von einer 4m hohen Brücke auf ein Motorboot fallen lassen, das mit einer konstanten Geschwindigkeit von 36 km/h unter ihm vorbei fährt. Damit er nicht vor oder hinter dem Boot ins Wasser fällt, will er genau dann los springen, wenn das Boot eine Markierungsboje in einem bestimmten Abstand s vor der Brücke passiert. Wie groß muß der Abstand s sein?



$$\begin{aligned}
 t_{\text{SPRUNG}} : \quad s &= \frac{1}{2} g \cdot t \\
 t &= \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} \\
 t &= 0,9 \text{ (s)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s &= v \cdot t \\
 &= 10 \cdot 0,9 \\
 &= 9 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

4. Aufgabe:

Ein Körper wird mit $v_0 = 12 \text{ m/s}$ abgeworfen.

- Berechnen Sie die Wurfweite für $\alpha = 30^\circ$.
- Berechnen Sie die Wurfweite für $\alpha = 60^\circ$.
- Was fällt an den Ergebnissen von a) und b) auf? Stellen Sie eine allgemeingültige Aussage auf.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad W &= \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} \\ &= \frac{12^2 \cdot \sin(60)}{g} \\ &= 12,7 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad W &= \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} \\ &= \frac{12^2 \cdot \sin(120)}{g} \\ &= 12,7 \text{ (m)} \end{aligned}$$

- Zwei Abschußwinkel, die gleich weit von 45° entfernt sind, erzielen bei gleichen Geschwindigkeiten die selbe Weite, wenn $90^\circ > \alpha > 0^\circ$.

5. Aufgabe:

Ein Düsenflugzeug fliegt mit 2000 km/h eine horizontal liegende, kreisförmige Bahn.

- Wie groß ist die Zentralbeschleunigung bei $r = 10,0 \text{ km}$?
- Ein Mensch erträgt (für die Dauer von 10s) eine Beschleunigung vom Betrag $6g$. Wie groß muß der Radius der Bahn mindestens sein, damit $a < 6g$?

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad v &= 2000 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 555 \frac{5}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ r &= 10 \text{ km} = 10.000 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r} \\ &= 30,9 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad a &= 6 \cdot g \\ a &= \frac{v^2}{r} \\ 6g &= \frac{v^2}{r} \\ r &= 5.243,67 \text{ (m)} \end{aligned}$$

6. Aufgabe:

Aus welcher Höhe muß man ein Auto ($m=800\text{kg}$) senkrecht nach unten fallen lassen, damit es denselben Aufprall erlebt, wie bei einem Frontalcrash mit 100 km/h ?

$$1. \quad m = 800 \text{ kg}$$
$$v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot (27,8)^2$$
$$= 308.642 \text{ (J)}$$

$$2. \quad E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$$

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$
$$h = \frac{E}{m \cdot g}$$
$$\approx 39 \text{ (m)}$$